

# DER STAHLBAU

SCHRIFTFÜHRUNG: PROF. DR.-ING. DR.-ING. E.H. KLÖPPEL DARMSTADT  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN BERLIN-WILMERSDORF

Heft 2 — Februar 1958



Die ARCOS-Spezialmarke.  
Seit über 30 Jahren unübertroffen.  
Erstes Symbol der Wechselstromschweißung.  
Die preiswerte dünnumhüllte Elektrode mit  
extrem elastischem Lichtbogen, geeignet für  
außergewöhnlich umfangreiches Anwendungsgebiet.

## REFORMEND-A

Riß- u. porenfreie Schweißnähte an Werkstoffen mit  
höherem Kohlenstoff-, Phosphor- oder Schwefelgehalt.  
Überbrückung größerer Luftspalten auch bei ungenauen Schweißkanten.  
Wesentliche Entlastung Ihrer Schweißer.  
Für Baust. St. 34-St. 42; Stahlg. GS-38.  
DB E 34, E 37, Germ. Lloyd.



GESELLSCHAFT FÜR SCHWEISSTECHNIK M.B.H. JÜLICHERSTR. 122/134 · TEL. 34841/42 · FS. 0832/701  
Schweiß- und Schneid-Elektroden · Netzmantel- und Falzdrähte · Transformatoren  
Schweißautomaten · Ausrüstungen · Balance-Positioner

Briefe, auf einer guten Schreibmaschine geschrieben, sind eine Referenz für den, der sie schrieb und ein Beweis für die Leistung hochentwickelter Maschinen. Ihr Schriftbild ist Ausdruck vollendeter Schreibtechnik im Dienste einer fortschrittlichen Büroarbeit.

**ADLER**

**Metallogen**  
GESELLSCHAFT FÜR SCHWEISSTECHNIK  
UND WERKSTOFFSCHUTZ M.B.H.  
WATTENSCHIED 1.W.

*Ein Trümpf!*

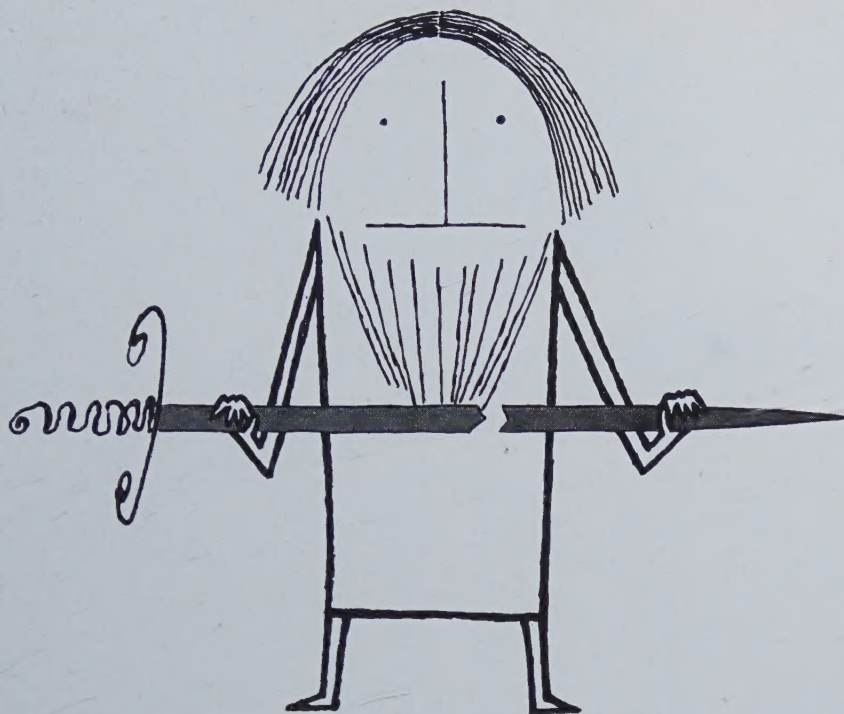
**UM 46V**  
Eine ideale  
**Metallogen**  
ELEKTRODE  
für die  
**Abwärtsschweißung**

Zugelassen von der Deutschen Bundesbahn für die Güteklassen E 34 z, E 37 z, E 52 z, einschließlich Stehbolzen, sowie für den Brückenbau als E 37 zB u. E 52 zB.

**Metallogen**  
ELEKTRODEN  
*Einmal erprobt  
immer gelobt!*

Wir suchen in verschiedenen Bezirken weitere Fachvertreter und Wiederverkäufer zu günstigen Bedingungen. Anfragen erbitten wir direkt an uns.





**„Könnt' ich die starken  
Stücken schweißen,  
die meine Kunst  
nicht zu kitten weiß!“**

*klagt der Zwerg Mime in Wagners Oper „Siegfried“ über den Trümmern des Schwertes Notung – und erst nachdem er den halben Akt hindurch aus Leibeskräften gesungen hat, gibt ihm endlich der vorbeiziehende Göttervater Wotan den richtigen Tip. Heute wäre ihm die Lösung von Schweißproblemen nicht mehr so sauer geworden . . .*

#### **ein Telefonanruf hätte genügt!**

*Überall in der Bundesrepublik finden Sie unsere Niederlassungen, deren Schweißfachleute Ihnen für jeden Zweck die richtige Klöckner-Elektrode empfehlen können – denn was sich in den Betrieben des Klöckner-Bereiches, die selbst Monat für Monat Millionen Elektroden verwenden, in der Praxis bewährt hat, wird auch Ihre Probleme lösen.*

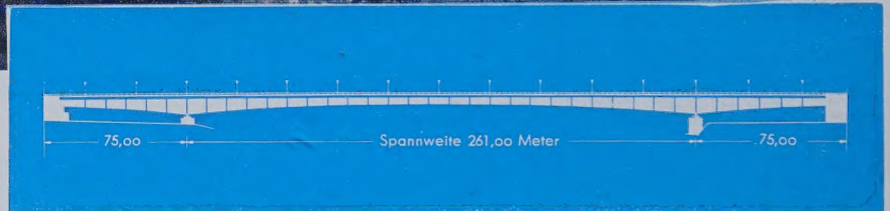
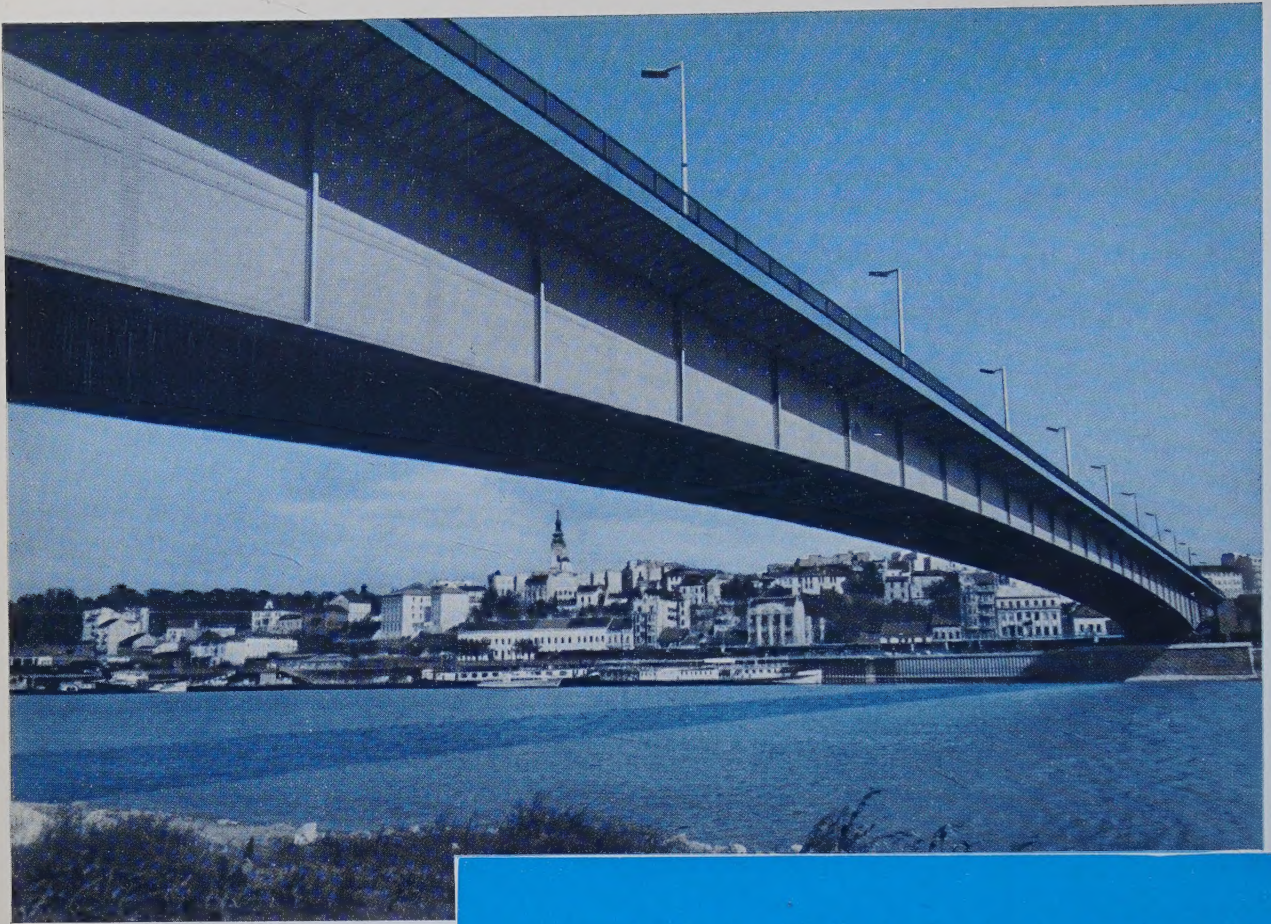


**KLÖCKNER-DRAHTINDUSTRIE GMBH DÜSSELDORF**

Alleinverkauf durch

**KLÖCKNER & CO. DUISBURG** mit den Niederlassungen in Berlin, Bremen, Düsseldorf, Hagen, Hamburg, Hannover, Kassel, Köln, Mannheim, München, Nürnberg, Osnabrück, Regensburg, Stuttgart





## SAVE-BRÜCKE BELGRAD

### WEITESTGESPANNTE VOLLWANDTRÄGERBRÜCKE DER WELT

Gesamtentwurf einschließlich Werkstattzeichnungen  
M·A·N

Lieferung und Montage mit jugoslawischen Firmen  
gemeinsam.

Beratung bei der Fertigung und Montage in Jugo-  
slawien durch M·A·N

Orthotrope Platte als Fahrbahn ganz geschweißt.

Montage der Mittelöffnung ohne Zwischenstützen  
von beiden Seiten.

Gesamtbreite der Brücke  $3,0 + 12,0 + 3,0 = 18,0$  m

Eröffnung am 10. 9. 1956

# M·A·N

# BRÜCKENBAU



Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kurt Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule  
Fernsprecher: Darmstadt 40 41, Anschluß 245

27. Jahrgang

BERLIN, Februar 1958

Heft 2

## Die neue Straßenbrücke über die Save in Belgrad

Von Milan Radojkovic, Belgrad

DK 624.27.014.2 Stahl-Balkenbrücke mit Vollwandträgern

### 1. Allgemeines

#### 1.1 Beschreibung und Bedeutung

Die neue Brücke über die Save in Belgrad (Bild 1), die an derselben Stelle wie die während des Krieges zerstörte Hängebrücke errichtet wurde, ist ein interessantes und bedeutsames Objekt. Als erneuter Beweis für die Möglichkeiten im modernen Großbrückenbau erreicht sie Abmessungen, die bei dieser Brückenart bisher nicht verwirklicht wurden.

Die Autobahn Ljubljana—Zagreb—Belgrad—Nis erhielt durch den Ausbau dieser Brücke eine wichtige Verbindung über die Save bei Belgrad. Obwohl die Brücke nicht in der zukünftigen Trasse der Autobahn liegt, wird sie doch in den folgenden fünf bis sechs Jahren erfolgreich diese Funktion ausüben, bis die nächstfolgende Brücke über die Save, flussabwärts von der jetzigen, und die Autobahn im Bereich von Belgrad ausgebaut und dem Verkehr übergeben wird.

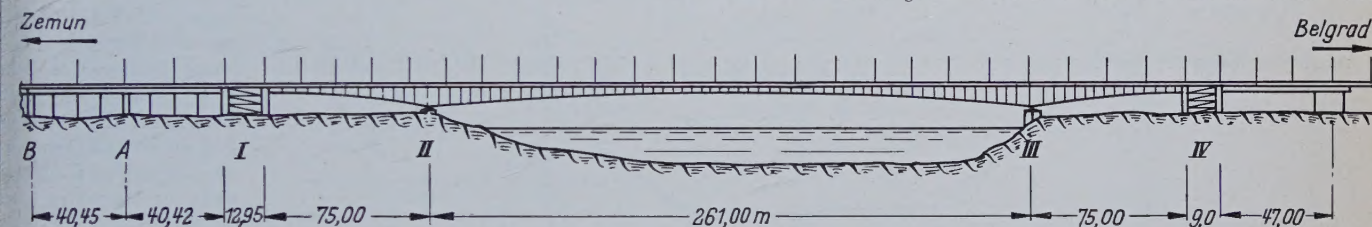


Bild 1. Ansicht der Brücke

Die neue Savebrücke ist eine kontinuierliche Vollwandträgerbrücke mit den Spannweiten von  $75 + 261 + 75$  m und stellt somit die weitestgespannte Brücke dieser Art in der Welt dar. Die Brücke ist als Deckbrücke gebaut mit 12 m breiter Fahrbahn und beidseitig angelegten Fußwegen von je 3 m Breite. Die Fahrbahnabdeckung besteht aus 5 cm Asphalt, der unmittelbar auf dem Deckblech der Stahlfahrbahn aufgebracht ist. Die Fußwegabdeckung besteht aus fertigen Stahlbetonplatten mit Überdeckung von 2 cm Asphalt.

Nach ihrer Konzeption stellt die neue Savebrücke den Abschluß einer folgerichtigen Entwicklung dar, die sich in Europa seit etwa 20 Jahren vollzieht. Der Bauherr war kühn genug, diese neuen Ideen in dieser Brücke zu verwirklichen. Historisch betrachtet ist besonders die Entwicklung zweier Elemente von Bedeutung, nämlich die Entwicklung des vollwandigen Trägers bis zu dieser Spannweite und die Anwendung der orthotropen (orthogonal-anisotropen) Platte als tragender Teil der Konstruktion. Die wichtigsten Vorgänger der angewandten Brückenart sind die Brücken Köln-Deutz, dem Verkehr übergeben 1948, mit den Spannweiten  $120 + 184 + 120$  m und die Brücke Düsseldorf-Neuß, erbaut 1951, mit den Spannweiten  $103 + 206 + 103$  m. Mit der letztgenannten Brücke wurde damals die größte Spannweite eines Vollwandträgers erreicht. In demselben Jahr wurde auch die Hängebrücke über den Rhein in Köln-Mülheim vollendet, die wegen der Einführung der orthotropen Platte mit ihrer zweifachen Funktion — der der Fahrbahnplatte und der des Obergurtes des Versteifungsträgers — von besonderer Bedeutung ist. So haben im Brückenbau die Vollwandbalkenträger die Spannweite von 200 m überschritten. Darüber hinaus hat sich klar die Entwicklung von Linienträger-Systemen über den Rost zum Flächentragwerk vollzogen.

Die Savebrücke hat augenscheinlich alle bisher gesammelten Erfahrungen ausgenutzt, aber auch selbst wertvolle Erkenntnisse

vermittelt. Dies gilt sowohl in bezug auf die Querschnittsgestaltung als auch auf die Anwendung des Schweißens. Die beiden großen Brücken, von denen vorher die Rede war, hatten einen geschlossenen kastenartigen Querschnitt des Hauptträgers. Auch bei dem Internationalen Wettbewerb für die neue Savebrücke im Jahre 1953 sahen die meisten Vorschläge für eine Balkenbrücke einen Kastenquerschnitt vor. Der ausgeführte Entwurf jedoch hatte einen offenen Hut-Querschnitt vorgesehen, der bei gleicher Tragfähigkeit die kleinste Stahlmenge erforderte, so daß die Wahl auf ihn fiel.

Das Schweißen war bei der neuen Savebrücke von besonderer Bedeutung; die orthotrope Platte läßt sich ohne Schweißen nicht ausdenken. Das Problem der leichten Fahrbahn durch Ausbildung als orthotrope Platte konnte wirtschaftlich erst nach dem zweiten Weltkrieg durch Einführung automatischer und halbautomatischer Schweißverfahren gelöst werden. Bei der Savebrücke wurden auch

die Montagestöße geschweißt. Um die Schwächung des Querschnittes bei genieteter Bauweise zu vermeiden, wurden die Stöße der oben genannten Brücken Köln-Deutz, Düsseldorf-Neuß und Köln-Mülheim einer gegen den anderen versetzt. Doch war der Verlust wegen der Nietlochschwächung erheblich.

Zum Vergleich der Bedeutung der Savebrücke wollen wir auch noch die Entwicklung in anderen Ländern anführen. In Belgien wurde 1954 die Brücke über die Meuse in Namur dem Verkehr übergeben. Dies ist eine kontinuierliche Balkenbrücke mit Spannweiten von  $10 + 138 + 10$  m; der Querschnitt ist kastenartig, die Ausführung genietet. In der Schweiz, in Basel, wurde in demselben Jahr die Brücke über den Rhein mit den Spannweiten  $57,5 + 135 + 57,5$  m fertiggestellt, die der neuen Savebrücke sehr ähnelt. Die Brücke hat eine wesentlich kleinere Spannweite und war daher auch leichter zu montieren. Die Montagennähte der orthotropen Platte sind von der Hand geschweißt<sup>1)</sup>.

Die Montagennähte der orthotropen Platte bei der Savebrücke wurden auf zweifache Art ausgeführt. Das Deckblech wurde mit dem Ellira-Verfahren geschweißt, während die Stoßnähte der Längsrippen in Zwangslage von Hand gelegt wurden.

Die konstruktive Bearbeitung dieser Brücke litt unter keinerlei Dogmatismus. Das Schweißen wurde bei jenen Elementen angewendet, welche die günstigsten Voraussetzungen dafür boten, während das Nieten überall dort beibehalten wurde, wo Schweißen von Nachteil gewesen wäre, oder wo sich Vorteile für die Montage ergaben. Die Stegblechstöße der Hauptträger und die Untergurte sind genietet. Die Austeifungen des hohen und dünnen Stegbleches wurden geschweißt. Die Querrahmen der Brücke und Vertikalen des Windverbandes (System Vierendeelträger) sind ebenfalls geschweißt.

<sup>1)</sup> Guyer, R.: Die St. Alban-Brücke über den Rhein in Basel, Schweiz. Bauztg. 1957, Nr. 29, S. 433/62 desgl. O. Oberholzer, Schweiz. Bauztg. 1957, Nr. 33, S. 515/20 und 1957, Nr. 34, S. 538/46.



Dagegen wurden alle Stöße des Hauptträgers — mit Ausnahme der Platte —, die Verbindung der Querrahmen der Brücke und des Hauptträgers, sowie die Verbindungen der Vertikalen des Horizontalverbandes mit dem Hauptträger genietet. Es ist natürlich, daß eine solche Brücke sowohl für den Bearbeiter als auch für den Bauherrn eine Menge noch ungeklärter Probleme mit sich brachte, welche im Laufe des Projektierens gelöst und zum Schluß durch die Prüfungen der fertigen Konstruktion bestätigt werden mußten. Wir wollen nun einige dieser Probleme anführen:

Die Einführung der orthotropen Platte warf unter anderem auch folgende Fragen auf:

- Wie wirkt sie als Fahrbahnelement der Brücke, wie hoch dürfen ihre Teile von der örtlich angreifenden Last beansprucht werden? Man wollte ein allgemeines Bild von der Tragfähigkeit dieser Platten und von der Sicherheit, die sie gewähren, erhalten.
- Was leistet die orthotrope Platte als mittragendes Element des Hauptträgers? Diese Frage war auch deshalb berechtigt, weil die relativ dünne Platte, verstärkt durch die Rippen, über den vollen Abstand der Hauptträger von 12 m gespannt war.

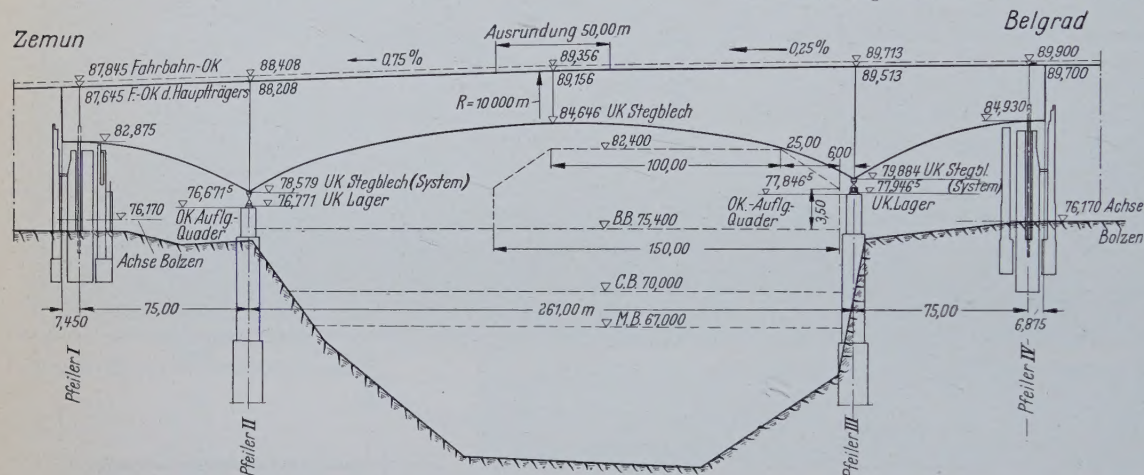


Bild 2. Verzerrtes Längenprofil

Der offene Querschnitt warf die Frage nach der Torsionssteifigkeit einer so ausgebildeten Brücke auf. Die Dauerfestigkeit bestimmter Schweißverbindungen, besonders der Elliraschweißungen auf der Baustelle, sollte auch erst erforscht werden.

Natürlich mußten Prüfungen auch auf eine Reihe anderer Fragen Antwort geben, wie etwa nach dem Verhalten der Brücke unter dynamischer Belastung, nach dem Zusammenwirken der Asphaltdecke mit den Deckplatten oder nach dem Einfluß der Temperatur.

Als Ergebnis der Untersuchungen und der vorzüglichen Planung ergab sich eine Verringerung des Eigengewichtes der Konstruktion von 6800 t, dem Gewicht der früheren Hängebrücke, auf 3800 t, bei gleicher Tragfähigkeit.

Die Planung führte nach ihrem Entwurf, der mit dem 1. Preis ausgezeichnet wurde, die Firma MAN, Werk Gustavburg, aus. Diese Firma lieferte auch die orthotrope Platte. Die jugoslawischen Firmen Dj. Djakovic aus Brod und Gosa aus Palanka lieferten je eine Hälfte der Hauptträger. Das Bauunternehmen Mostogradnja führte die Montagearbeiten aus. Die Zusammenarbeit war reibungslos und erfolgreich. Alle Schwierigkeiten wurden überwunden und die Arbeiten an der Brücke ohne einen einzigen Zwischenfall beendet. Die Brücke wurde am 10. September 1956 dem Verkehr übergeben.

## 1.2 Linienführung und freier Schiffsraum

Gelegentlich des Projektierens der Linienführung der neuen Brücke wurden wesentliche Änderungen gegenüber der Linienführung der alten Brücke vorgenommen. Das rechte Ufer der Save, auf welchem sich der alte Teil Belgrads befindet, ist höher als das linke Ufer. Der Höhenunterschied beträgt etwa 15 m. Deshalb fand man, daß es nicht natürlich ist, die alte Linienführung beizubehalten, die die Fahrbahn von der Belgrader Seite an noch bis zur Mitte der Brücke ansteigen und erst dann gegen das Terrain des linken Ufers abfallen läßt. Vielmehr bildete man die neue

Brücke mit einseitigem Gefälle aus, wie es Bild 2 zeigt. Die Werte sind so gewählt, daß die Neigung auf der Zemun Seite selbst bei größter Durchbiegung der Brückenmitte kein Gegengefälle erhält. Die Forderung nach einseitigem Gefälle war um so leichter zu erfüllen, da die tragende Konstruktion unter der Fahrbahn liegt, so daß sich unschöne Auswirkungen geneigter „Vertikalen“ usw. nicht ergaben. Diese Idee wurde anfangs viel kritisiert, erwies sich aber, nachdem die Brücke vollendet war, als voll gerechtfertigt.

Die Steigung vom Pfeiler IV nach Belgrad zu beträgt 1,5 ‰ und das Gefälle vom Pfeiler I nach Zemun zu 3 ‰. Alle Übergänge von einer Neigung zur anderen sind mit einem vertikalen Halbmesser von 10 000 m ausgerundet.

Wegen der Änderung der Linienführung und der Form des Hauptträgers der neuen Brücke mußten die vorhandenen Pfeiler und Widerlager der früheren Hängebrücke umgebaut werden. Dieser Umbau galt aber nur der äußeren Form, da alle Auflagerkräfte der jetzigen Brücke kleiner sind, als die der vorherigen. Das feste Lager befindet sich auf dem Stropfpfeiler des linken Ufers (Pfeiler II). Auf dem Stropfpfeiler des rechten Ufers (Belgrader Seite, Pfeiler III) ist ein bewegliches Lager angeordnet. In den beiden Widerlagern, Pfeiler I und IV, ist die Brücke durch lotrechte

Zugpendel verankert, da hier stets negative Auflagerkräfte auftreten. Die Rampe aus Stahlbeton auf dem linken Ufer der Save mußte wegen der neuen Linienführung auf einer Länge von etwa 50 m um über 2 m gesenkt werden. Der Träger über die Straße am rechten Ufer mit einer Spannweite von 47 m wurde ebenfalls umgebaut, und zwar so, daß die Hauptträger, die um 1,20 m über die Fahrbahn hervorragten und auf diese Weise die Fahrbahn vom Gehsteig

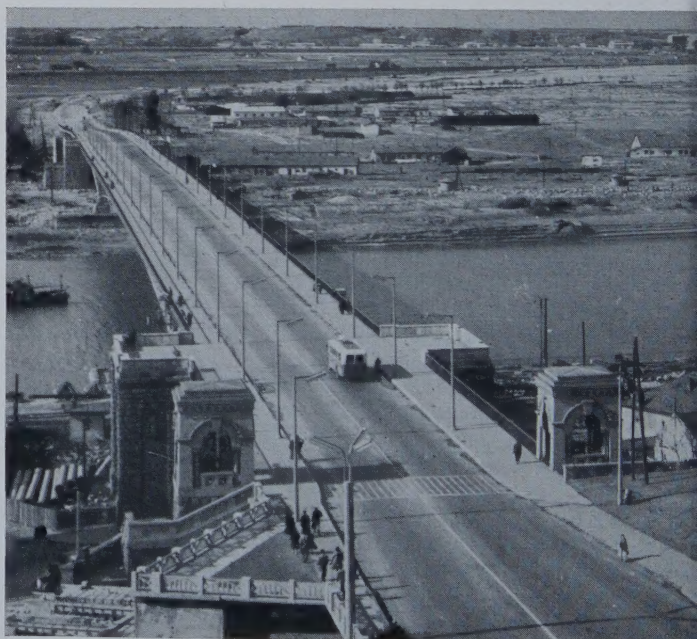


Bild 3. Blick auf die neue Brücke

trennten, in der Höhe verkürzt und verstärkt wurden, so daß die Fläche des oberen Gurtes mit den Betonplatten des Gehsteiges bedeckt werden konnte. Auf diese Weise wurde ein einheitliches Aussehen der ganzen Brücke erreicht (vgl. Bild 3).

Das erforderliche freie Schiffsfahrtsprofil wurde gewährleistet wie aus Bild 2 ersichtlich ist.



alle großen Knoten-Querträger. Die Stahlplatte und die Längsrippen jedoch ändern ihre Abmessungen nach den Bedürfnissen der Momentendeckung (Bild 6). An den Stellen der kleinsten Momente beträgt die Dicke des Bleches 10 mm und die Breite 12,3 m. Vom Widerlager zum Stropfeiler hin vergrößert sich die Blechdicke



entsprechend den größeren Momenten bis auf 25 mm. Um aber diese Dicke nicht zu überschreiten, wird die Breite des Deckbleches vom Knoten 4 ab auf 15,2 m vergrößert. Nach dem Knoten 8 (Mittelstütze) vermindert sich die Dicke bis auf 10 mm (Knoten 14 und 15) und die Breite auf 12,3 m (Knoten 11); die Dicke steigt dann wieder bis auf 15 mm in Brückenmitte an.

Das Deckblech der orthotropen Platte hat eine vierfache Funktion: Als Membrane überbrückt es den Raum zwischen zwei Rippen und den Querträgern und überträgt auf sie die Belastung. Darüber hinaus bildet es den Obergurt der Längsrippen, den Obergurt des Querträgers und endlich den Obergurt des Hauptträgers.

Die Längsrippen sind auf der ganzen Brücke aus Flachstahl hergestellt. Neben der Übertragung der örtlichen Belastung auf die Querträger dienen sie auch zur Aufnahme der Obergurtkräfte des Hauptträgers. Wegen dieser zweiten Aufgabe ändert sich der Querschnitt längs der Brücke, indem er den Bedürfnissen der Momentendeckung angepaßt wird. Die Längsrippen werden als kontinuierlich durchlaufende Träger auf unendlich vielen Stützen berechnet, wobei in der Mittelzone der Platte die Stützen elastisch sind, während sie im Bereich der Schrammbohle als starr angesehen werden können. Entsprechend den verschiedenen Stützungsverhältnissen werden die Längsrippen in drei Gruppen eingeteilt. (vgl. Bild 4).

Die Querträger werden als geschweißte Blechträger ausgebildet, deren Obergurt das Deckblech ist. Wegen der Querneigung der Fahrbahntafel von 2,5 % ist der Querträger in der Mitte um etwa 150 mm höher als über den Stützen. Die Dicke des Stegbleches beträgt 8 mm. Andere Einzelheiten siehe Bild 4 und 7.

Die orthotrope Platte wurde in der Werkstatt in Teilen von ungefähr 3 m Breite und einer Länge von 12,3 oder 15,2 m hergestellt. Da die Längsrippen mit dem Deckblech als Gurt der Hauptträger wirken ist es vorteilhaft, die Montagestöße beider Glieder in gleicher Weise auszubilden. Würde man bei geschweißten Stößen des Deckbleches die Stöße der Längsrippen nieten, so würden sich infolge Nachgebens der Nietverbindung die Längsrippen der Kraftübernahme entziehen. Der Stoß des Deckbleches würde daher überbeansprucht werden. Da auch die Rippenstöße geschweißt wurden, entfiel die Querschnittsschwächung durch die Nietlöcher, desgleichen waren keine Laschen notwendig, die allein eine Gewichtseinsparnis von rd. 50 t brachten.

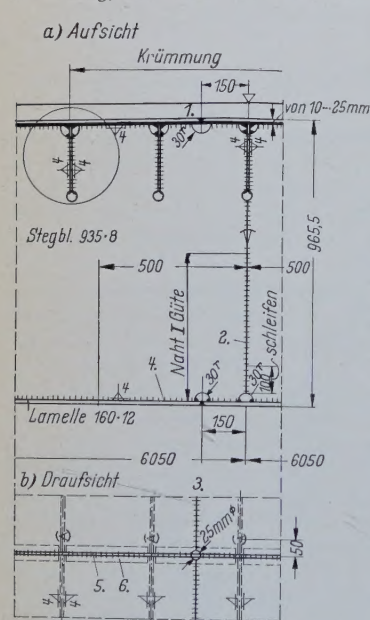


Bild 7. Schweißtechnische Ausbildung des Querträgers.

1. Längsstoß des Deckbleches, 2. Stumpfstoß des Stegbleches, 3. Untergurtlamellenstoß, 4. Kehlnaht, zuletzt geschweißt, 5. Quernaht des Deckbleches, während der Montage Ellira-geschweißt, 6. Unterlagsplättchen 50 x 10 x 280

fluß in den Längsrippen (Kerffeckt). Da es sich um besonders hoch beanspruchte Stellen handelt, sind diese Nähte mit größter Sorgfalt mit kalkbasischen Elektroden geschweißt worden. Als Abschluß des Schlitzes wurde ein Loch mit dem Durchmesser 30 bis 35 mm gebohrt (Bild 8).

Ein zweites Merkmal ist die konsequente Vermeidung des Überschneidens von Nähten. Um Überschneidungen z. B. der oberen Kehlnähte der Längsrippen mit denen des Querträgerstegbleches entlang des Deckbleches zu vermeiden, ist auf dem Querträgerstegblech die Ecke mit  $r = 30$  mm ausgeschnitten. Die Nähte der Kreuzverbindung zwischen Längsrippe und Querträger werden also nicht in die Ecke hineingeführt, sondern durch den Ausschnitt nach unten wieder umgeleitet. Dadurch traten Endkrater nicht auf.

Ein Montagestück der orthotropen Platte wurde aus zwei Teilen von 6,15 oder 7,65 m Länge zusammengeschweißt. Der Stoß des Stegbleches des Querträgers ist um 150 mm gegen den Stoß des Deckbleches und der Gurtlamellen verschoben. Die Eckausschnitte an den Kreuzungspunkten mit den Längsrippen bedingen eine diskontinuierliche Übergabe der Scheerspannungen, die sich aber nicht nachteilig auswirkt. Je 150 mm links und rechts von der Mitte sind die Kehlnähte zwischen Stegblech und Untergurt in dieser Phase noch nicht gezogen; diese am wenigsten empfindlichen Nähte werden zuletzt gelegt. Die Stumpfnähte am Stegblech und Untergurtlamelle sind wegen der hohen Spannungen und dem großen Intervall zwischen min.  $\sigma$  bearbeitet und durchstrahlt worden.

Die so vorbereiteten Montagestücke der orthotropen Platte wurden dann auf der Baustelle zusammengeschweißt, und zwar das Deckblech mit dem Ellira-Verfahren und die 50 mm verschobenen Stöße der Längsrippen in vertikaler Zwangslage von Hand (Bild 7b). Einzelheiten der Stoßvorbereitung sind aus Bild 9 ersichtlich. Die Fugenvorbereitung ist etwas ungewohnt. Durch den Einsatz sehr hoher Stromstärken war beim Ellira-Verfahren in seinen ersten Jahren das Verhältnis des aufgeschmolzenen zum aufgetragenen Werkstoff sehr hoch. Das Ergebnis war eine Nadel- also grobkörnige Gußstruktur. Die Ermüdungsfestigkeit solcher Verbindungen war dagegen befriedigend. Doch die Tendenz der späteren Entwicklung ging auf Mehrlagenschweißen, so daß die Naht aus einer größeren Zahl dünnerer Lagen bestand, damit die ersten Lagen durch die späteren einer thermischen Behandlung, d. h. Normalisierung ausgesetzt wurden. Diesem Typ entspricht auch die vorgesehene Form des Deckblechstoßes. Das Ellira-Verfahren muß sehr gut verarbeitet werden, wenn Unterbrechungen oder sonstige Fehler vermieden werden sollen. Um außerdem unabhängig von der möglichen Längengenauigkeit bei der Montage zu sein, wurde die Form nach Bild 9 gewählt. Die Blechkanten sind unbearbeitet, der Boden wird von dem Unterlagsplättchen gebildet, das mit handgeschweißten Kehlnähten mit den Blechkanten verbunden ist. Dadurch soll ein Eindringen des dünnflüssigen Bades zwischen Deckblech und Unterlagsplättchen verhindert werden.

Der Weg, eine richtige Lösung zu finden, war mühsam und manchmal auch langwierig. Eine Zwischenlösung im Falle des Stoßes verschiedener Blechdicken A und B zeigt Bild 9. Aber die Entwicklung des Stoßes ist damit nicht beendet. Die Weiterentwicklung ist in Bild 10 dargestellt. Bei den ersten Nähten nämlich sind zahlreiche Risse quer zur Nahtlänge entstanden. Es sind zwei Meinungen über deren Entstehung ausgedrückt worden. Die erste besagt, beim Übergang des Lichtbogens über die Fuge (1) in Bild 10 entsteht ein Lufteinbruch und als Folge der Gasspannungen bildeten sich die Risse; der zweiten Meinung nach entstehen die Risse wegen der unzulänglichen Festigkeit der Verbindung zwischen Plättchen und Längsrippe, so daß die Spannungen aus der Abkühlung nach dem Schweißen nicht aufgenommen werden können. Die verschiedenen Phasen der Lösung sind in Bild 10 dargestellt.

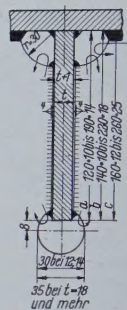


Bild 8. Detail der Durchdringung der Längsrippe durch das Stegblech des Querträgers. Die Grenzabmessungen der Längsrippengruppen sind eingeschrieben.

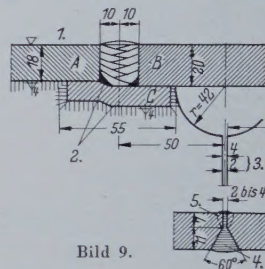


Bild 9.

Montagestoß des Deckbleches der orthotropen Platte beim Wechsel der Deckblechdicke. Montage-naht I Güte, Ellira-geschweißt in mehreren Lagen. 1. Oberfläche der Platte, 2. Handgeschweißte Naht, links in der Werkstatt, rechts auf der Baustelle, 3. Abstand vor Schweißen des Deckbleches, 4. Zuerst gelegte Naht, 5. Mit Fugenhobler gehobelt und nachträglich zugeschweißt.



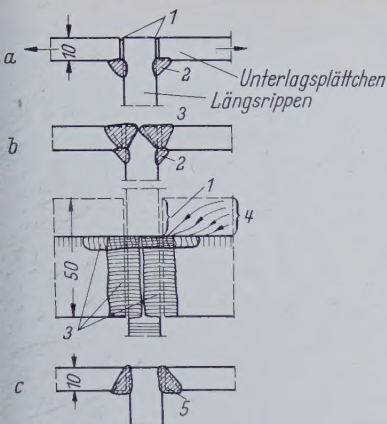


Bild 10. Unterlagsplättchenstoß gegen Längsrippe. 1. Diskontinuität, 2. Werkstattnaht, erste Ausbesserung, 3. Verbesserung auf der Baustelle, 4. Kraftlinienfluß, 5. Werkstattnaht, endgültige Ausführung

ang der Längs- und Querstöße der Bleche, Verbindung des Stegbleches mit der orthotropen Platte und über Einleitung großer konzentrierter Kräfte in das Stegblech, z. B. an den Stellen der Auflagerung, aufhalten.

Das Stegblech wird mittels eines Rostes von Quer- und Längsrippen gegen Ausbeulen gesichert. Diesen Rost bilden vor allem die vertikalaussteifungen in den Ebenen der Knoten mit dem Abstand von etwa 9,3 m. Von der Außenseite sind die Aussteifungen T-förmig und von innen sind es die Stiele der Rahmen. Diese Aussteifungen sind mit dem Stegblech vernietet. Zwischen den Rahmen befinden sich in den Drittelpunkten auf der Innenseite ebenfalls vertikale T-förmige Aussteifungen kleinerer Abmessung (Stegblech 160 × 8; Stütze 140 × 8), die auf das Stegblech aufgeschweißt sind. Um durch diese Schweißnähte möglichst geringe Eigenspannungen und Verformungen im Stegblech hervorzurufen, wurde das Stegblech der

An Stelle der Kreuzung der Quer- und Längsnaht des Deckbleches wurde ein Loch  $\phi$  25 mm gebohrt (vgl. Bild 7 b).

Der Stoß der Längsrippen ist 50 mm neben dem Stoß des Deckbleches angeordnet und wird gemäß Bild 9 ausgeführt.

### 2.3 Hauptträger

Außer den bisher gegebenen Angaben müssen wir uns noch bei einigen Fragen wie Aussteifung des Stegbleches, das auf der ganzen Brückenlänge 14 mm dick ist, Vertei-

Aussteifungen auf größere Längen kammartig ausgeschnitten und an den Zinken angeschweißt.

Außer den Quersteifen werden zur Sicherung der Stabilität des Stegbleches eine Reihe Längssteifen vorgesehen, die alle aus einem Wulstprofil 160 × 8 bestehen. Die Längssteifen sind auf dieselbe Weise wie die Quersteifen, d. h. mit unterbrochenen Nähten mit dem Stegblech verschweißt. Um zur Sicherung des Stegbleches gegen Ausbeulen einen wirksamen Rost zu schaffen, werden die Längssteifen an die Quersteifen angeschweißt und zur Überleitung der Gurtkräfte durchgebunden. An der Stelle der Stegblechdecklaschen für die Baustellenstöße müssen die Längssteifen unterbrochen werden. In diesem Bereiche werden die Wulstprofile biegesteif gestoßen.

Wegen der großen Höhe des Stegbleches ist es im allgemeinen aus drei und in der Nähe der Mittelstütze aus mehr Blechstreifen zusammengesetzt. Der oberste Streifen ist ungefähr 800 mm breit. Er ist als ein Bestandteil des Elementes Platte durch Kehlnähte mit dem Deckblech verbunden. Die Schubspannungen sind wegen der großen Höhe des Trägers nicht bedeutend. Da die Bleche nicht in beliebiger Breite gewalzt werden können, sind in der Gegend der Mittelstütze mehrere Blechstreifen und somit auch Längsstöße erforderlich. Diese Längsstöße sind genietet und als Baustellenstöße ausgeführt. Eine Ansicht des Stegbleches von innen in der Nähe der Mittelstütze sieht man in Bild 11 und in der Mitte der Brücke in Bild 12. Hier ist der Stoß nicht in der Mitte angeordnet, sondern um 1,55 m nach links und rechts versetzt, damit man ein Paßstück in beliebiger Länge einfügen kann, durch das eventuelle Längendifferenzen ausgeglichen werden können. Diese Maßnahme ist berechtigt, wenn man bedenkt, daß die Montage im Freivorbau mit einer Auskragung von ungefähr 130 m vorgenommen wurde, die bis jetzt nicht ausgeführt wurde.

Außer den Längsstößen sind in der Mitte jedes Feldes lotrechte Stegblechstöße vorgesehen, welche ebenfalls als genietete Baustellenstöße ausgeführt wurden. Die Untergurte sind ebenfalls in jeder Feldmitte gestoßen, so daß die Montagestücke der Hauptträger eine Länge von ungefähr 9,5 m besitzen. Im Untergurt hat der schwächste

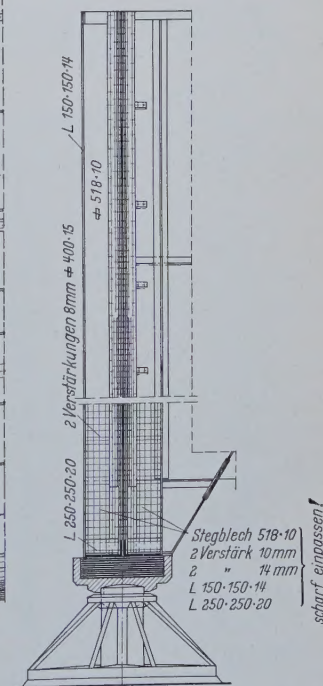
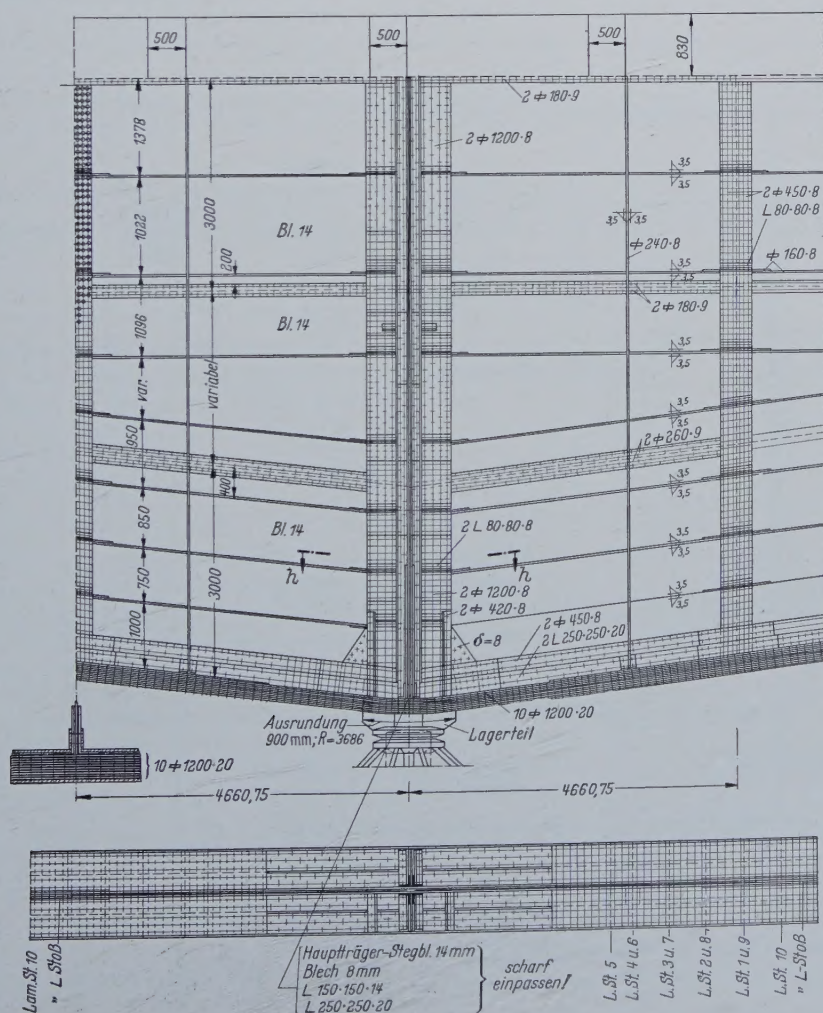


Bild 11. Hauptträger mit Aussteifung am Mittelpfeiler, Punkt 8, Innenseite



Querschnitt eine und der stärkste zehn Lamellen. Die Breite der Fahrbahnmontagestücke beträgt ungefähr 3,1 m, so daß auf jeden Montageteil des Hauptträgers drei Platten aufgelegt werden konnten.

Sämtliche Stöße des Stegbleches, sowie alle Stöße des Untergurtes wurden genietet. Die Laschen des Stegblechstoses sind nur 8 mm dick. Die Stöße der Gurtlamellen, die eine Gesamtdicke von 240 mm erreichen, erforderten zylindrisch gedrehte Nieten von 29 mm Durchmesser. Nach einiger Übung wurden die Nieten sowohl in der Werkstatt als auch auf der Baustelle zur vollen Zufriedenheit geschlagen.

Oberhalb der Mittelstützen, wo in das Stegblech große konzentrierte Kräfte eingeführt werden, ist dieses besonders verstärkt.

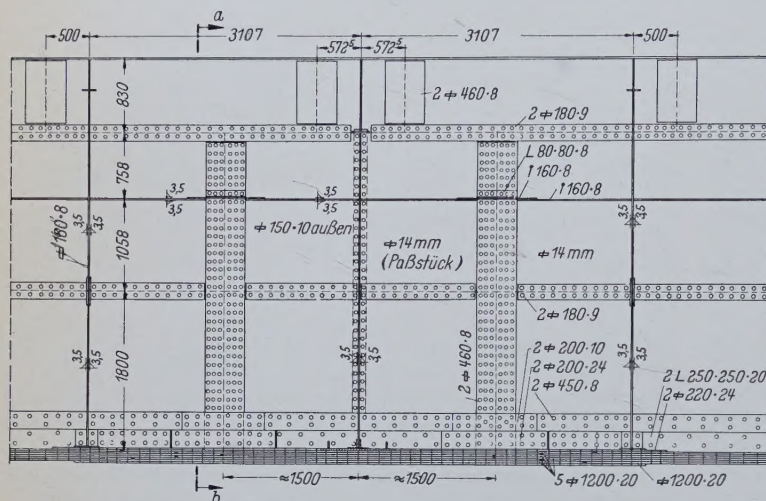


Bild 12. Hauptträger in der Mitte; Paßstück Punkt 22, Innenseite

Dies ist erreicht durch 2 Beilagen  $1200 \times 8$  neben den bestehenden Beiflächen  $400 \times 8$  und den äußeren und inneren Aussteifungen, welche gegen den Untergurt eingepaßt und mit Nieten mit den Stegblech verbunden sind. Die Lamellen des Untergurtes sind im Bereich des Lagers auf eine Länge von 900 mm ausgerundet und in den oberen Kippkörper des Lagers eingepaßt. Aus den Lamellen kommende Abtriebskräfte können daher unmittelbar auf Kontakt in das Lager übertragen werden (Bild 13).

#### 2.4 Querscheiben

Damit die Windkräfte von der Brückenkonstruktion an die Lager übergeben werden können, sind Querscheiben angebracht, mit welchen beide Wände des Hauptträgers biegesteif verbunden sind. Die Querscheiben sind im Punkt 0, 8 und 16, d. h. am Widerlager, Mittelstütze und ungefähr im Viertelpunkt der Mittelöffnung, angeordnet. In Punkt 0 besteht die Querscheibe aus einem Fachwerkträger (Bild 14). Dieses Fachwerk mit biegesteifem Obergurt kann sowohl die

Schnitt a-b

Schnitt h-h (s. Bild 11)

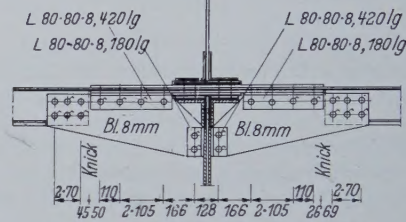


Bild 13. Verstärkung des Stegbleches an der Mittelstütze (Punkt 8)

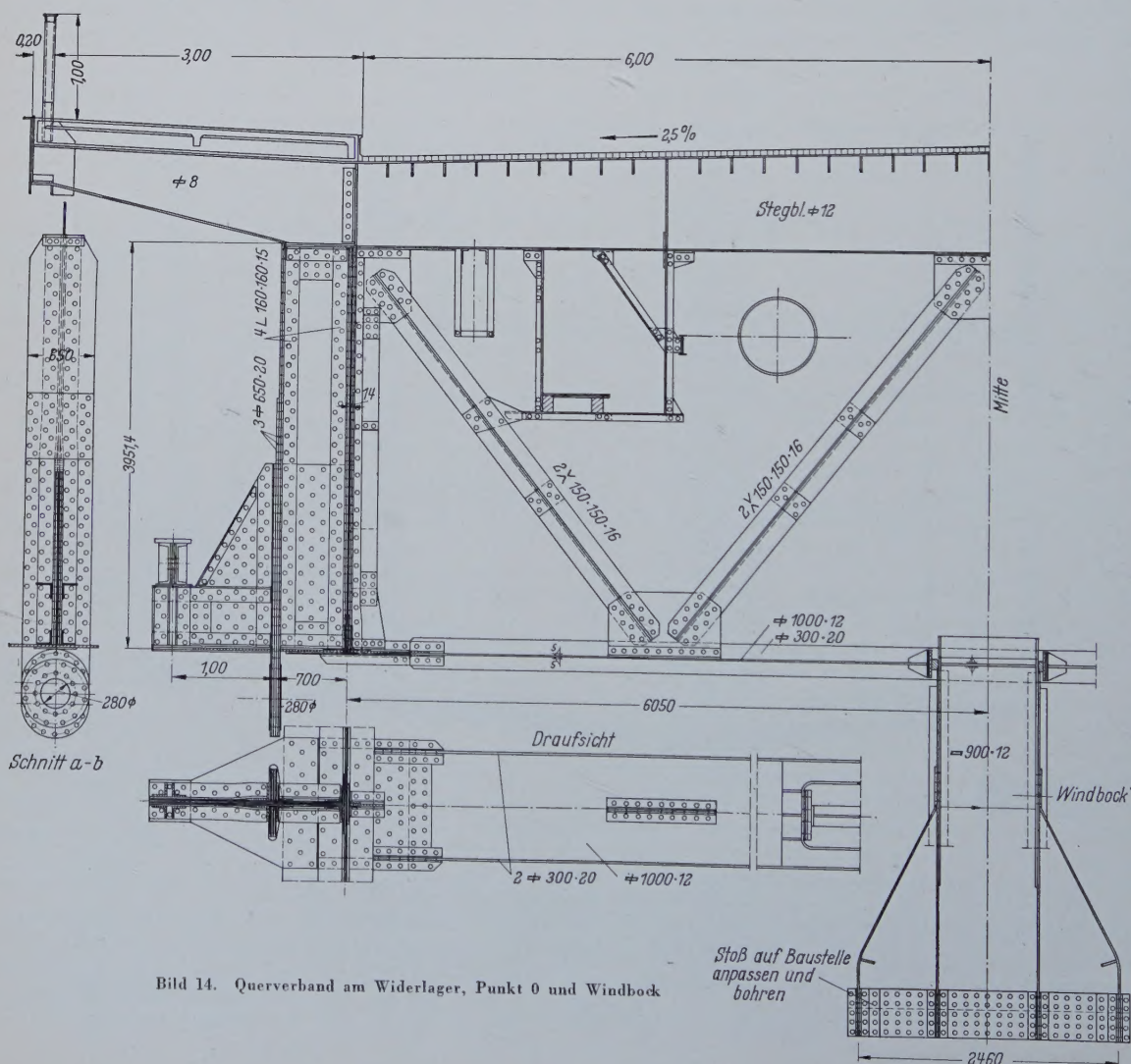


Bild 14. Querverband am Widerlager, Punkt 0 und Windbock



Versetzungsmomente aus der Übertragung der Windkräfte als auch die Exzentrizitätsmomente aus der Einleitung der lotrechten Auflagerkräfte aufnehmen, die mit Rücksicht auf die vorhandenen Kabelschächte der vorherigen Hängebrücke rd. 700 mm außerhalb der Stegblechebene der Hauptträger angreifen. Die lotrechte Zugverankerung kann nur die in ihrer Ebene wirkenden Auflagerkräfte infolge ständiger Last und Verkehr aufnehmen. Die waagrechten Auflagerdrücke infolge Wind werden durch eine besondere in die Widerlager einbetonierte Windabfangkonstruktion abgeleitet.

Für die Aufnahme der negativen Auflagerkräfte ist während der Montage ein zusätzlicher Anker vorgesehen (Bild 14), dessen Länge reguliert werden kann und dadurch die Überhöhung des freien Armes der Brücke während der Montage beeinflusst. Diese Einrichtung dient auch zum Nachlassen der Brückenenden und zur Erzeugung positiver Momente im mittleren Teil der Brücke nach Beendigung der Montage. Ist dieser Vorgang abgeschlossen, so baut man an seiner Statt den ständigen Anker ein, dessen Länge an Ort und Stelle bestimmt wird.

Die Querscheibe im Punkt 8 ist als vollwandiger geschlossener Rahmen ausgebildet (Bild 4). Durch den freibleibenden Raum kann der Besichtigungswagen durchfahren. Der untere Riegel des Rahmens liegt aus architektonischen Gründen 1,080 m über dem Untergurt des Hauptträgers im Punkt 8. Dieser Riegel ist ein Pfosten des unteren Vierendeel-artigen Horizontalverbandes. Wegen des Höhenunterschiedes der wirkenden Kräfte des Verbandes und des Rahmens in bezug auf das Lager entstehen Biegemomente, die durch einen besonderen Kastenträger auf Torsion übernommen werden.

Die Querscheibe im Punkt 16 ist ähnlich ausgebildet wie die im Punkt 8. Ihre Aufgabe ist, den Horizontalverband, der in der Ebene der Untergurte liegt, im Momententiefpunkt der Mittelöffnung möglichst starr mit der oberen Stahlfahrbahn zu verbinden.

#### 2.5 Der untere Verband

Da die Zugbänder der Halbrahmen in der Untergurtebene als biegesteife Träger ausgebildet wurden, entsteht dadurch im Untergurt ein gekrümmter Rahmenträger (Vierendeel-Träger), der die Windkräfte auf die Auflager am Mittelpfeiler und Widerlager überträgt und die Knicksicherheit des Untergurtes im gedrückten Bereich gewährleistet. Die Pfosten des so gebildeten Vierendeel-Trägers werden als I-förmige Träger ausgebildet und mittels besonderer Knotenbleche und Anschlußwinkel biegesteif angeschlossen. An

zwei Stellen werden diese Vierendeel-Träger an der orthotropen Platte aufgehängt. Die Breite der Pfosten ändert sich nach den veränderlichen Querkraften von 600 bis 920 mm. Die Stegblechdicke ist 8 mm gewählt. Die Gurtungen sind so ausgebildet, daß sie über die Unterkante der Hauptträgergurte nicht hervorstehen; in Querschnitten wo nur eine Gurtlamelle im Hauptträger vorhanden ist, werden die Gurtlamellen der Pfosten nur einseitig auf das Stegblech aufgeschweißt.

#### 2.6 Andere Einzelheiten

Über Fußwegkonsolen, Fußwegrandträger und Geländer ist nichts Besonderes zu sagen.

Die Lager haben gewisse Besonderheiten, da für die Stromauflager im weitgehenden Maße Lagerteile des Pylonenfußlagers der alten Hängebrücke ausgenutzt wurden. Das unbewegliche Lager wurde auf den linken Strompfeiler (Seite Zemun) gelegt und als Punktkipplager ausgebildet. Die obere Kipplatte wurde entsprechend den Abmessungen der Neukonstruktion neu angefertigt.

In den Widerlagern kommen aus ständiger Last und Verkehr nur Zugkräfte vor. Die Stahlkonstruktion wird daher an diesen Punkten durch Zugpendel in den Widerlagern verankert (Einzelheiten siehe Bild 14). Die horizontalen Kräfte werden über den Pfosten des Vierendeel-Trägers und über den Windbock in das Widerlager abgeleitet.

#### 2.7 Allgemeine Betrachtungen

Diese Beschreibung gibt uns einen Einblick in die jetzige Entwicklung des Brückenbaues, die eindeutig das Flächentragwerk mit dünnen Elementen bevorzugt, deren Formen weitgehende Anwendung des Schweißens ermöglichen. Die heutige Brückenkonstruktion erinnert in vielem an Schiffskonstruktionen. Andererseits geht man, wie im Maschinenbau schon seit langem, immer mehr dazu über, für eine Konstruktion nach der Beanspruchung verschiedenes Material zu verwenden, und zwar nicht nur in bezug auf die Festigkeit, sondern auch in bezug auf die Qualität innerhalb der Sorte.

Dünne Profile wurden in der Planung der neuen Savebrücke folgerichtig angewandt. Sie wurden nicht dicker ausgeführt als es nach der Berechnung notwendig war. Als Beispiel möge auch das dienen, daß die Laschen der Stegblechstöße des Hauptträgers nur 8 mm, die Stegbleche der Hauptträger selbst 14 mm, die Stegbleche der Querträger wiederum 8 mm dick sind. (Fortsetzung folgt.)

## Beitrag zur praktischen Ermittlung der Vergleichsschlankheit $\lambda_{vi}$ von mittig gedrückten Stäben mit einfachsymmetrischem offenem dünnwandigem Querschnitt

Von K. Klöppel und R. Schardt, Darmstadt

DK 624.075.2 Auf Knicken beanspruchte Elemente

Das allgemeine Stabilitätsproblem des mittig gedrückten Stabes mit einfachsymmetrischem offenem dünnwandigem Querschnitt wird beschrieben durch ein System von 3 Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} EI_x v_M'''' + P v_M'' &= 0, \\ EI_y u_M'''' + P u_M'' + P y_M \vartheta'' &= 0, \\ EC_M \vartheta'''' + (P i_M^2 - G I_D) \vartheta'' + P y_M u_M'' &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei sind  $u_M$  und  $v_M$  die Verschiebungskomponenten des Schubmittelpunktes und  $\vartheta$  die Querschnittsdrehung. Striche bedeuten Ableitungen nach  $z$  (Stabachse).  $P$  ist die kritische Last und die übrigen Größen sind die bekannten Querschnitts- und Stoffwerte. Bei Kappus [1] erscheinen die Differentialgleichungen in etwas anderer Form, weil alle Größen auf den Schwerpunkt bezogen sind. Die erste der drei Differentialgleichungen ist unabhängig von den beiden anderen und liefert den Eigenwert  $P_{Kx}$ , der für das Knicken um die  $x$ -Achse maßgebend ist. Die beiden letzten Differentialgleichungen sind miteinander gekoppelt. Es tritt Ausweichen in Richtung der  $x$ -Achse mit gleichzeitiger Verdrehung auf. Der dazugehörige Eigenwert  $P_{Kd}$  ist stets kleiner als der reine Biegeknickwert  $P_{Ky}$ .

Die Lösungsansätze

$$u_M = a_1 \cdot \sin \frac{\pi z}{s} \quad (2a)$$

$$\text{und } \vartheta = a_2 \cdot \sin \frac{\pi z}{s} \quad (2b)$$

befriedigen die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_M(s) &= 0, \\ u_M''(s) &= 0, \\ \vartheta(s) &= 0, \\ \vartheta''(s) &= 0, \end{aligned}$$

für gelenkige und gleichzeitig wölfbreie Lagerung (die sogenannte Gabellagerung). Durch Einsetzen der Lösungsfunktionen in die Differentialgleichung erhalten wir die Knickdeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^2 EI}{s^2 P_{Kd}} - 1 & -y_M \\ -y_M & \frac{\pi^2 EC_M}{s^2 P_{Kd}} - i_M^2 + \frac{G I_D}{P_{Kd}} \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus läßt sich die kritische Biegedrillknicklast  $P_{Kd}$  für den Hookeschen Bereich ausrechnen. Um die Bemessung auf das beim Biegeknicken übliche  $\omega$ -Verfahren zurückzuführen, formen wir die Determinante noch um und rechnen statt der kritischen Last die sogenannte Vergleichsschlankheit  $\lambda_{vi}$  aus; das ist die Schlankheit  $\bar{\lambda}_y$  eines Vergleichsstabes, dessen Knicklast  $\bar{P}_{Ky}$  gleich der Biegedrillknicklast  $P_{Kd}$  des untersuchten Stabes ist.

$$P_{Kd} = \bar{P}_{Ky} = \frac{EF \pi^2}{\bar{\lambda}_y^2} = \frac{EF \pi^2}{\lambda_{vi}^2} \quad (3)$$
$$\lambda_{vi} = \pi \sqrt{\frac{EF}{P_{Kd}}}$$



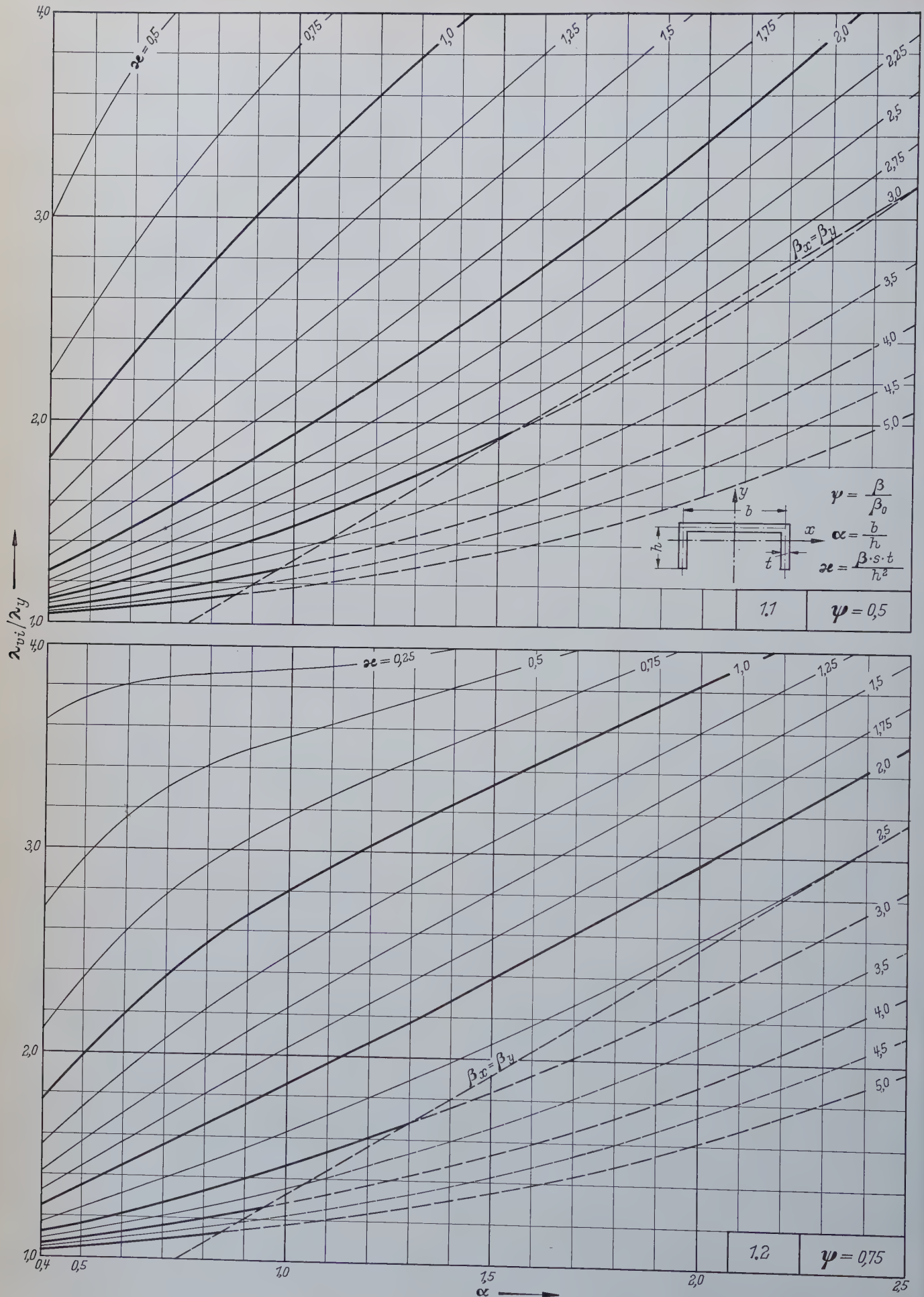


Bild 1. Kurventafeln  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_{vy}}$  für I-Profile mit  $\psi = 0.5$  und  $0.75$



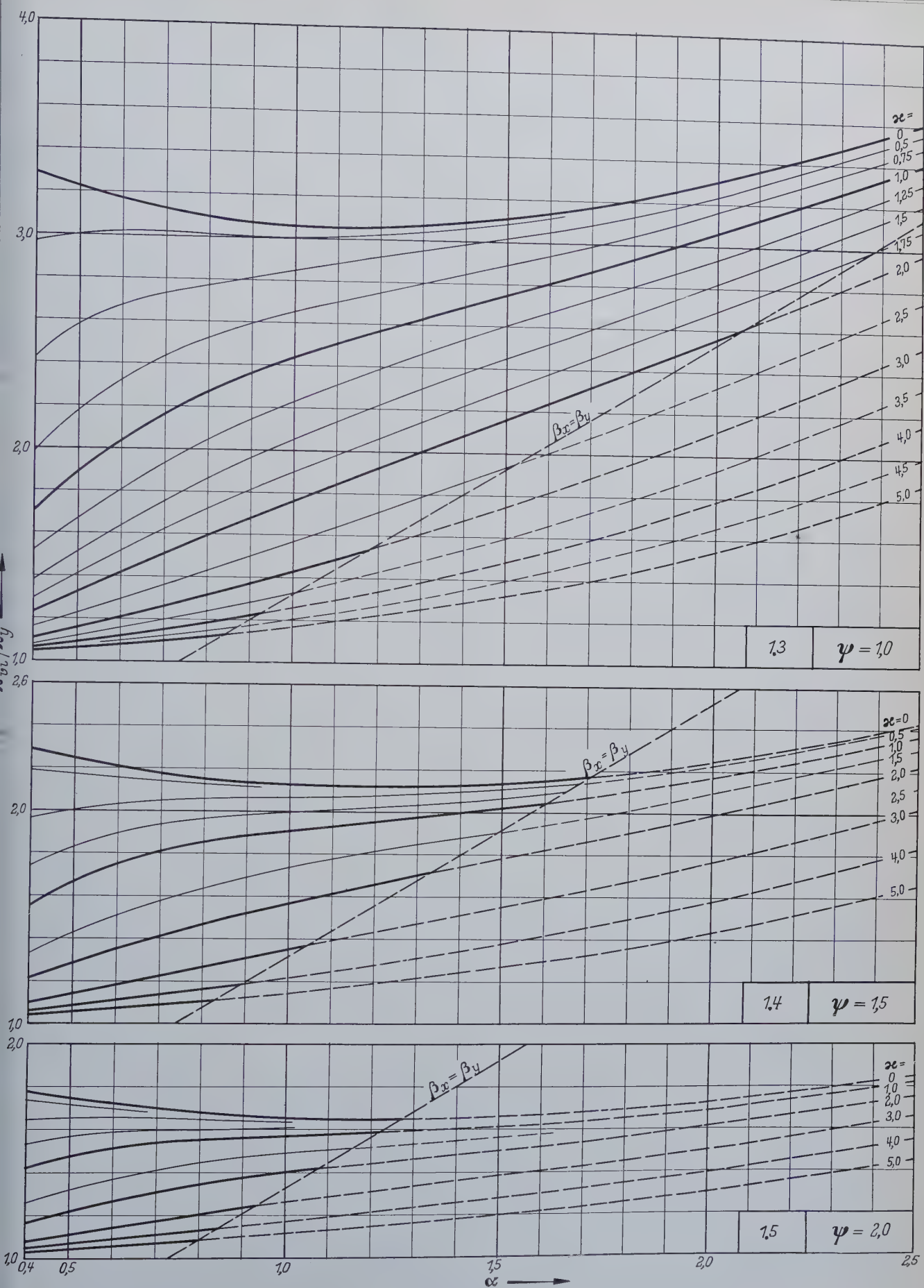
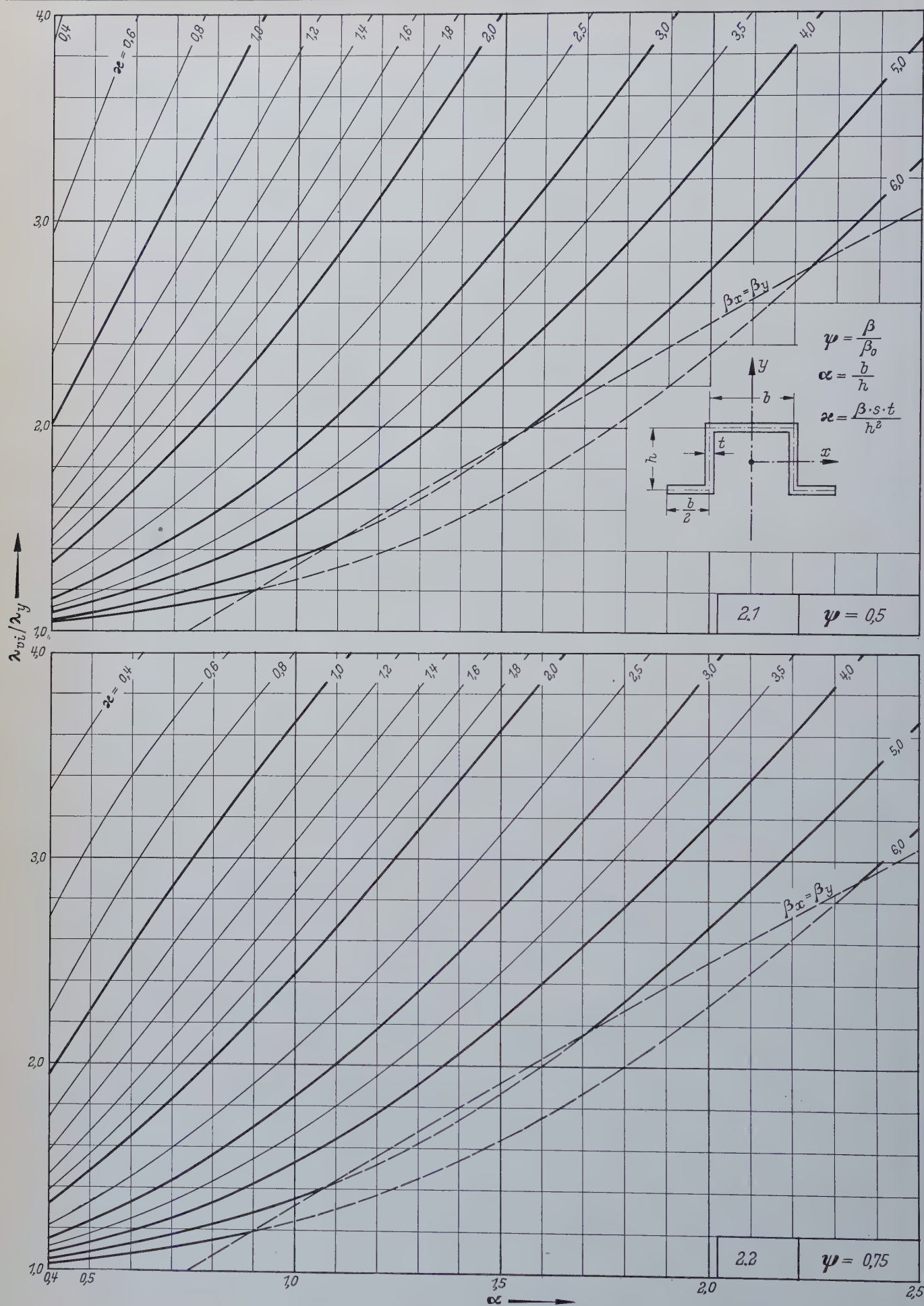


Bild 2. Kurventafeln  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y}$  für  $\square$ -Profile mit  $\psi = 1.0; 1.5; 2.0$



Bild 3. Kurventafeln  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y}$  für  $\Gamma$ -Profile mit  $\psi = 0.5$  und  $0.75$



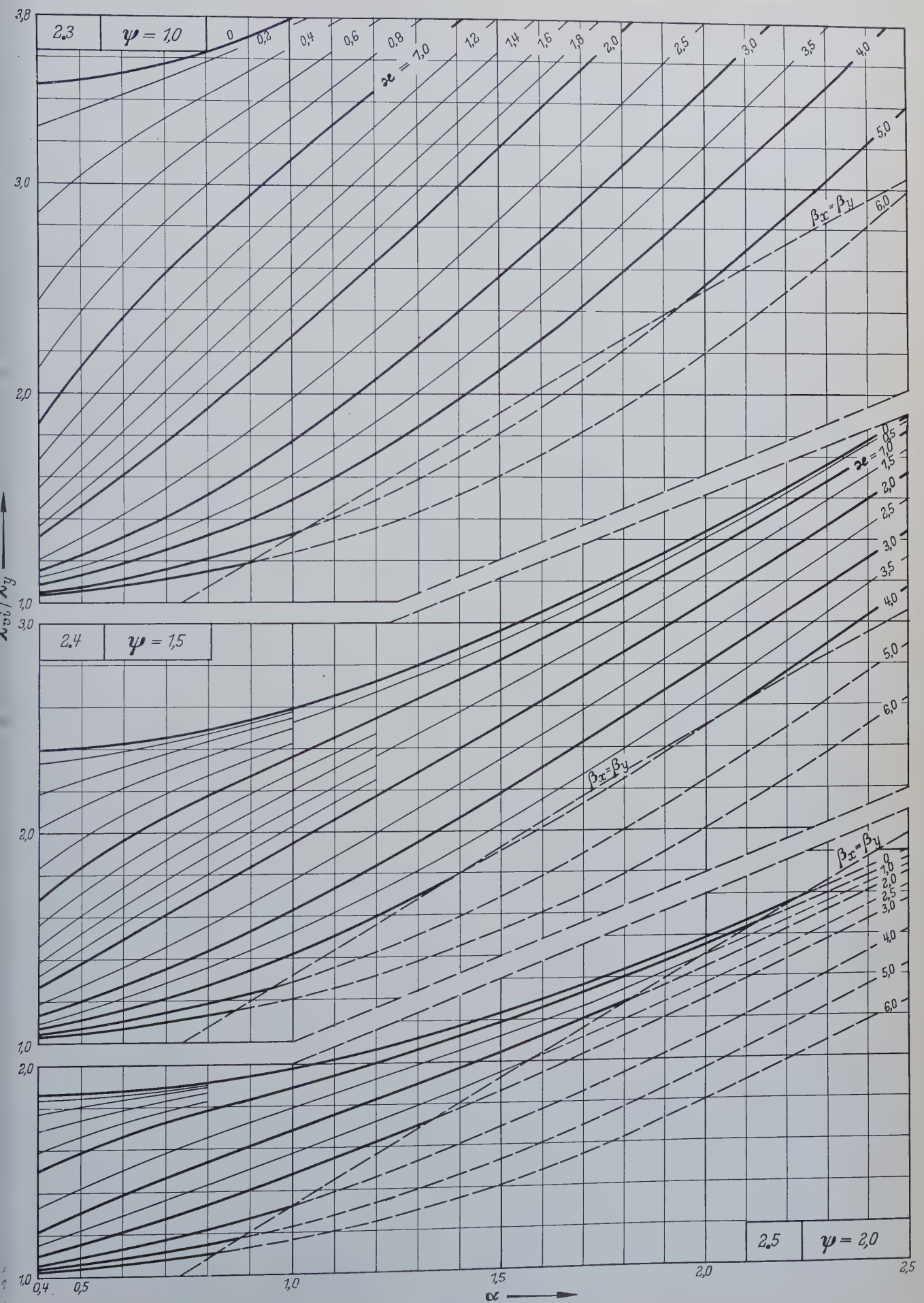
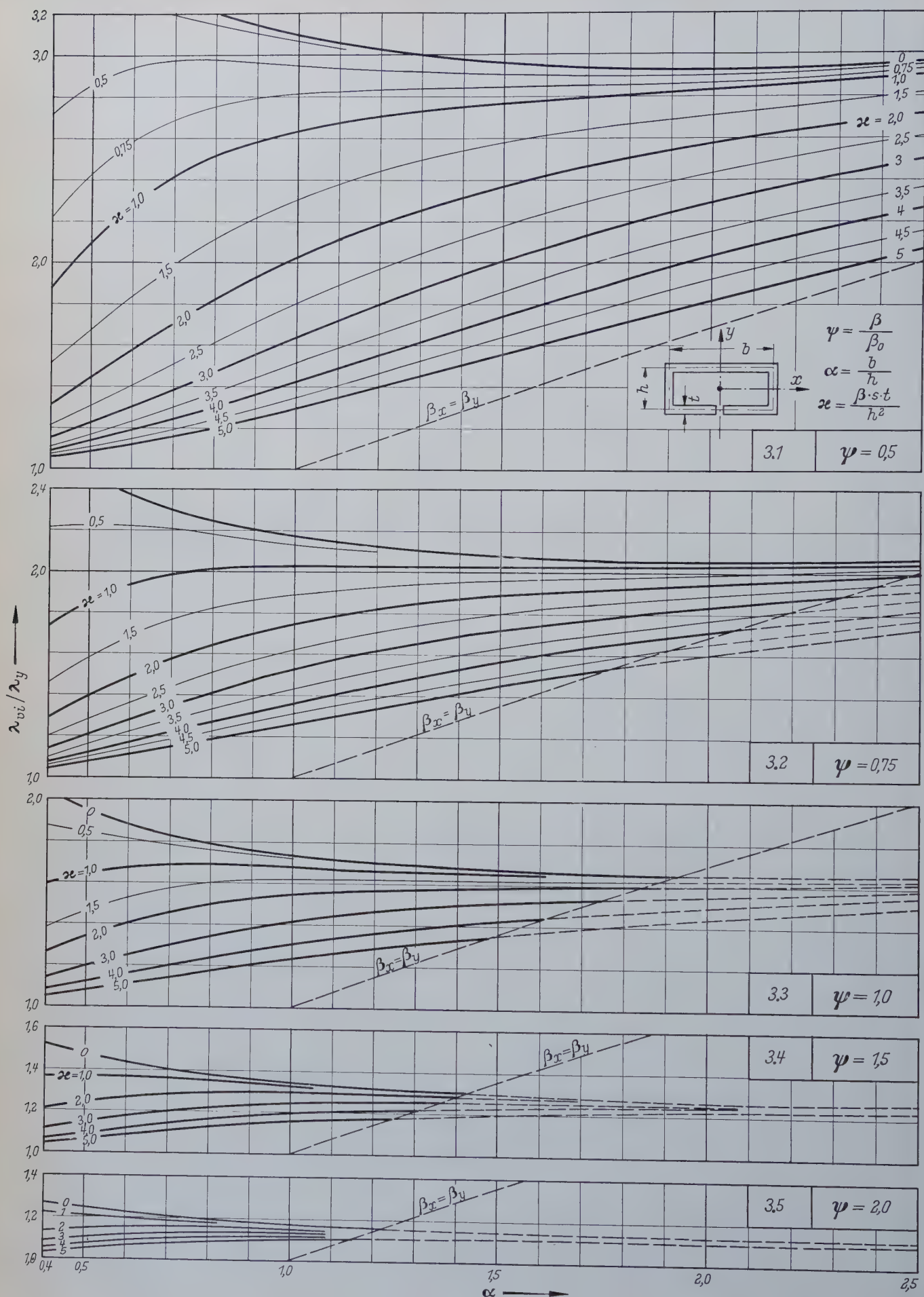


Bild 4. Kurventafeln  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y}$  für  $\square$ -Profile mit  $\psi = 1,0; 1,5; 2,0$



Bild 5. Kurventafeln  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y}$  für  $\square$ -Profile mit  $\psi = 0,5; 0,75; 1,0; 1,5; 2,0$



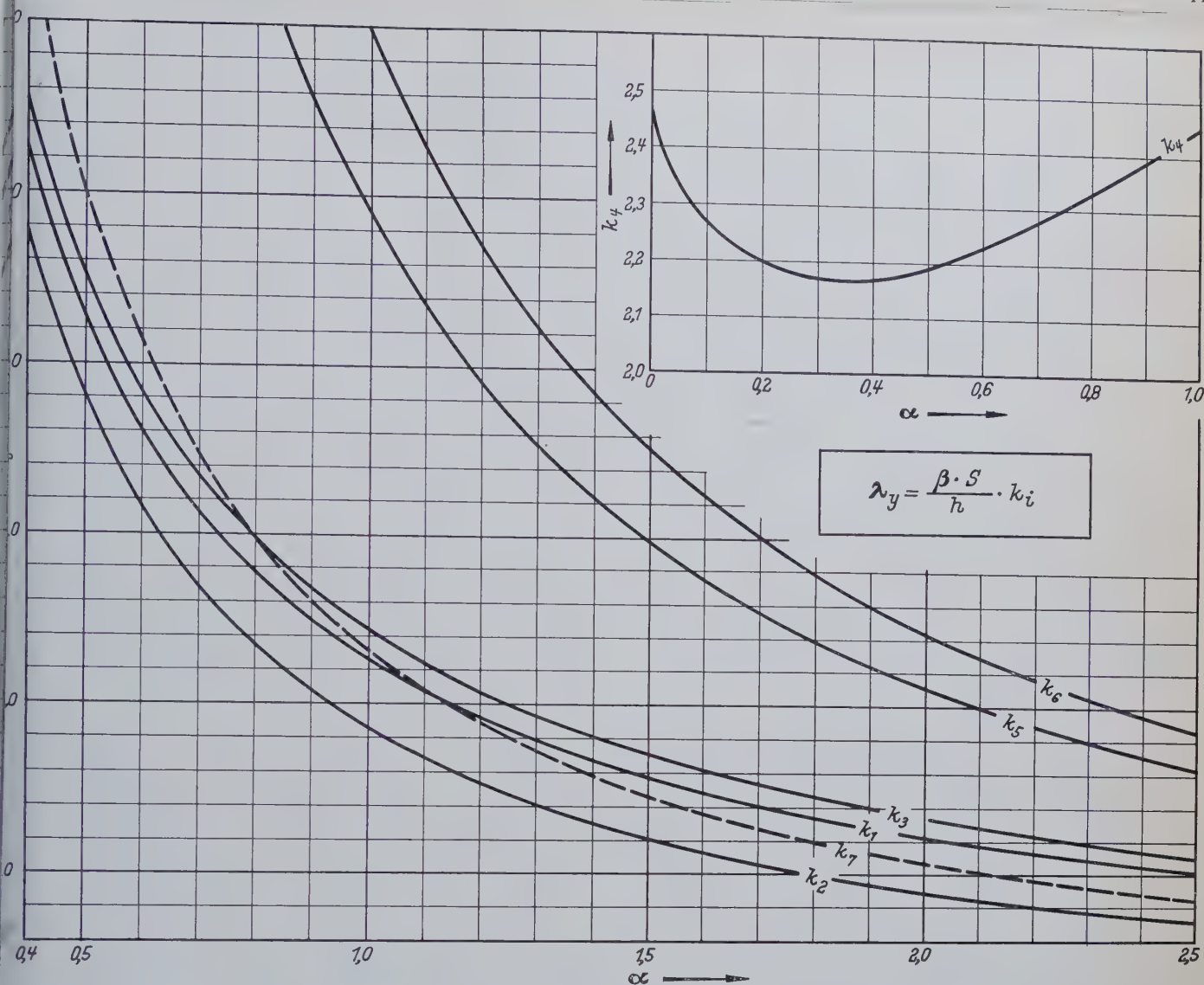


Bild 6.  $k_i$ -Werte zur Ermittlung von  $\lambda_y$

Zu dieser Schlankheit sucht man den zugehörigen  $\omega$ -Wert und bemißt nach der bekannten Formel

$$\sigma = \frac{\omega P}{F} < \text{zul } \sigma_d.$$

In der Praxis wird man häufig Lagerungsfälle vorfinden, die von den oben eingesetzten Lösungsansätzen nicht befriedigt werden. Für solche Fälle sind zwei Lagerbeiwerte  $\beta$  und  $\beta_0$  in die Knickbedingung eingearbeitet, die den Einspannungsgrad für Biegung und Verwölbung berücksichtigen. Sie sind mit Hilfe der Energiemethode bestimmt worden und stellen für Lagerungsfälle, die von der Gabelagerung abweichen, nur Näherungslösungen dar. Man erhält so endgültig die in DIN 4114 Ri 7.52 angegebene Form

$$\lambda_{vi} = \frac{\beta s}{i_y} \sqrt{\frac{c^2 + i_M^2}{2 c^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4 c^2 [i_p^2 + 0,093 (\beta^2/\beta_0^2 - 1) \gamma_M^2]}{(c^2 + i_M^2)^2}} \right\}}.$$

Die zahlenmäßige Auswertung dieser Formel erfordert zunächst die Ermittlung einer Anzahl von Querschnittswerten. Für einige Querschnitte sind die allgemeinen Formeln in DIN 4114 Ri 7.51 angegeben. Trotzdem ist der Rechenaufwand noch so groß, daß in der Praxis öfter als es die Sicherheit erlaubt auf den Biegedrillknicknachweis verzichtet wird.

Der Biegedrillknicknachweis mittels dieser Formel ist nicht Bestandteil der eigentlichen Vorschrift, also des Blattes 1 der DIN 4114. Der Statiker ist jedoch durch die Bestimmung des Abschnitts 7.2 dazu angehalten, zu prüfen, ob in bestimmten Fällen eine besondere Untersuchung auf Biegedrillknicken aus Gründen der Sicherheit geboten ist. Um diese Entscheidung zu treffen, ist in der Regel das

Einsetzen von Zahlenwerten in die Gleichung für  $\lambda_{vi}$  notwendig, da Erfahrungen in der Beurteilung der Gefährlichkeit des Biegedrillknickens, die es dann gestatten, auf eine numerische Rechnung zu verzichten, nur durch häufige Vergleichsrechnungen gewonnen werden können.

Der Deutsche Ausschuß für Stahlbau hat in dankenswerter Weise Mittel zur Verfügung gestellt, um eine Vereinfachung des Nachweises zu erreichen. Es war dabei vor allem an eine Verkürzung der Wurzelformel gedacht. Die Untersuchungen zeigten aber, daß keine der Querschnittsgrößen ohne nennenswerten Einfluß ist und eine kürzere Formel nur in ganz engen Bereichen für die Praxis ausreichende Genauigkeit lieferte. Eine Ablösung der umständlichen Formel durch mehrere einfachere wäre auch nur dann erstrebenswert gewesen, wenn sich einfache Kriterien für die Anwendungsbereiche hätten formulieren lassen. Als die am meisten erfolgversprechende Lösung aller dieser Schwierigkeiten drängte sich immer mehr eine systematische Auswertung der Wurzelformel für bestimmte Querschnittsformen auf, wobei es vor allem auf die vorteilhafte Wahl der veränderlichen Werte ankam. So sind z. B. für einen Stab aus [-förmig abgekanntem Blech sechs Systemwerte zur eindeutigen Bestimmung der Vergleichsschlankheit erforderlich: Die Stablänge  $s$ , die Flanscbreite  $h$ , die Steghöhe  $b$ , die Blechdicke  $t$ , der Einspannungsgrad für Biegung  $\beta$  und der Einspannungsgrad für Verwölbung  $\beta_0$ .

$$\lambda_{vi} = f(s, b, h, t, \beta, \beta_0)$$

Für die Auswertung ist die dimensionslose Darstellung sehr viel vorteilhafter, weil sich die sechs Freigrößen dann auf drei Verhält-



nisgrößen vermindern, die zur eindeutigen Bestimmung von  $\lambda_{vi}$  ausreichen.

$$\lambda_{vi} = f(\alpha, \kappa, \psi)$$

mit

$$\alpha = \frac{b}{h},$$

$$\kappa = \frac{ts}{h^2},$$

$$\psi = \frac{\beta}{\beta_0}.$$

Mit diesen drei Parametern schreibt sich z. B. die Wurzelformel für das oben beschriebene [-Profil in folgender Weise:

$$\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{k_1}{2k_2}\right) \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4k_2[k_3 + 0,093(\psi^2 - 1)]k_4^2}{(k_2 + k_1)^2}}\right\}},$$

mit den folgenden Abkürzungen

$$k_1 = \frac{1}{2 + \alpha} \left[ \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{6}\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{2 + \alpha} + \frac{2 + \alpha}{2 \left(1 + \frac{\alpha}{6}\right)} + 1 \right],$$

$$k_2 = \frac{2}{\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha}{6}\right)} \left[ (\psi^2 - 1) \frac{\alpha^2}{24} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3}\alpha}{1 + \frac{\alpha}{6}} + 0,013(2 + \alpha)\kappa^2 \right],$$

$$k_3 = \frac{\frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{6}\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{2 + \alpha}}{2 + \alpha},$$

$$k_4 = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\alpha}{6}\right)} + \frac{1}{2 + \alpha}.$$

Die gesuchte Größe ist jetzt das Verhältnis der Biegedrillknick-schlankheit  $\lambda_{vi}$  zur Biegeknickschlankheit  $\lambda_y = \frac{\beta \cdot s}{i_y}$ , ein Wert, der stets größer als 1 sein muß. Die Auswertung der Formel erfolgte z. B. für das [-Profil in den Grenzen

$$0,4 < \alpha < 2,5,$$

$$0 < \kappa < 5,0,$$

$$0,5 < \psi < 2,0.$$

Die Ergebnisse sind in den Bildern 1 und 2 für verschiedene Lagerungsfälle  $\psi$  dargestellt. Im Feld mit der Ordinate  $\lambda_{vi}/\lambda_y$  und der Abszisse  $\alpha$  sind die Kurven  $\kappa = \text{const.}$  eingetragen<sup>1)</sup>.

Nur durch die Tatsache, daß die Zahlenrechnung zum größten Teil am Rechenautomaten IBM 650 der Deutschen Forschungsgemeinschaft in der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt werden konnte, war es möglich, Ergebnisse in dem jetzt vorliegenden Umfang zu erzielen. Ebenso wie der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei an dieser Stelle auch Herrn Dipl.-Ing. Scheer für die Mithilfe bei der Aufbereitung der Rechnung und wertvolle Hinweise gedankt.

Für die folgenden Querschnittsformen wurden die Kurven  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y}$  ausgerechnet:

<sup>1)</sup> Die Kurventafeln dürfen nur mit Genehmigung der Verfasser an anderer Stelle wiedergegeben werden.

## Kurventafel

Profil 1		1.1—1.5 (Bild 1 u. 2)
Profil 2		2.1—2.5 (Bild 3 u. 4)
Profil 3		3.1—3.5 (Bild 5)
Profil 4		4.1—4.5
Profil 5		5
Profil 6		6
Profil 7		7.1—7.5
Profil 8		8.1—8.5
Profil 9		9.1—9.5

Bild 6 enthält die Hilfswerte  $k_i$  für die Ermittlung von  $\lambda_y$ .

Die Profile 4—9 erscheinen demnächst in einer Fortsetzung dieses Aufsatzes. Dort wird dann auch über Versuche mit wölbfreier Lagerung der Stäbe berichtet werden, die im Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt wurden.

Zahlenbeispiel: Gegeben sei ein [-Profil 80 · 100 · 40 · 4 (Bild 7), mit den Abmessungen:

$$s = 2,00 \text{ m},$$

$$h = 10,00 \text{ cm},$$

$$b = 8,00 \text{ cm},$$

$$t = 0,4 \text{ mm},$$

und  $\beta_x = \beta_y = 1$ ;  $\beta_0 = 2/3$ .

Gesucht sei  $\lambda_{\max}$ .

Mit den Parametern

$$\alpha = \frac{80}{100} = 0,8,$$

$$\kappa = \frac{0,4 \cdot 200}{10^2} = 0,8,$$

$$\psi = 1,5$$

ergibt sich aus Bild 6:  $k_2 = 2,34$ ,  
aus Tafel 2.4 (Bild 4):  $\frac{\lambda_{vi}}{\lambda_y} = 2,27$ ,  
und  $\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = 1,08$ .

$$\text{Damit wird } \lambda_y = 2,34 \cdot \frac{200}{10} = 46,8,$$

$$\lambda_x = 1,08 \cdot 46,8 = 50,5,$$

$$\text{und } \lambda_{vi} = 2,27 \cdot 46,8 = 104,0 = \lambda_{\max}.$$

Wenn die Krempe des Hutprofils nicht gleich  $\frac{b}{2}$  ist, kann man zwischen den Tafeln 1, 2 und 3 quadratisch interpolieren.

(Fortsetzung folgt.)

## Schrifttum

- [1] Kappus, R.: Biegedrillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftfahrtforschung Bd. 14 (1937) H. 4, S. 444.
- [2] Chwalla, E.: Über die Kippstabilität querbelasteter Druckstäbe mit einfachsymmetrischem Querschnitt. Beiträge zur angewandten Mechanik, Federhofer-Girkmann-Festschrift, S. 125. F. Deuticke Verlag, Wien 1950.
- [3] Klöppel, K.: Zur Einführung der neuen Stabilitätsvorschriften. Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 12. Verlag Walter Dorn G.m.b.H., Bremen-Horn 1952.
- [4] Kappus, R.: Zentrisches und exzentrisches Drehknicken von Stäben mit offenem Profil. Stahlbau 22 (1954) H. 1, S. 6.

## Seitenträgerbrücken, eine Abwandlung der Mittelträgerbrücken

Von Dr.-Ing. Günter Hoeland, Hannover

DK 624.271 Trägerbrücken

### 1. Einleitung

Mittelträgerbrücken wurden schon mehrfach, auch für große Stützweiten, vorgeschlagen [1] — [4], jedoch erst in zwei Fällen für kleinere Fußgängerbrücken ausgeführt [5] u. [6]. Bringt dieses System bei großen Brücken mit breiten Fahrbahnen als besonderen Vorteil die Trennung der Verkehrswege für die beiden Richtungen, verbunden mit einem nicht zu unterschätzenden Blendschutz für den Gegenverkehr, so wirkt sich bei schmalen Brücken die Teilung des Verkehrsweges häufig als Nachteil aus, denn nun wird jede einzelne Verkehrsbahn noch schmaler, so daß in vielen Fällen ein Überholen erschwert wenn nicht sogar unmöglich gemacht wird. Aber gerade bei sehr schmalen Brücken läßt sich der Vorteil der einen Haupt-

tragwand mit dem Vorteil der einen Verkehrsbahn vereinigen, wenn man die Haupttragwand nicht mehr in Brückenmitte anordnet, sondern als Seitenträger neben die Fahrbahn (oder den Fußweg) legt (Bild 1). Der Nachteil des nun fehlenden Blendschutzes dürfte bei schmalen Brücken keine Rolle spielen. Bei reinen Fußgängerbrücken entfällt er ganz.

### 2. Allgemeine Angaben

Ein großer Vorteil dieses Systems, besonders gegenüber den Brücken mit zwei Haupttragwänden, liegt in der architektonischen Gestaltungsmöglichkeit. Haupttragglied und Abdeckung können getrennt voneinander angeordnet werden, so daß nur die Konsolen



ne Verbindung herstellen. Sie können ebenso aber auch auf die ganze Brückenlänge miteinander verbunden werden. Praktisch läßt sich jedes statische System verwenden. Es sind also der Gestaltung auch in dieser Hinsicht keine Grenzen gesetzt. Seitenträger wirken durch ihre Wirkung auf den Beschauer in vielen Fällen zu beitragen, Anziehungspunkte zu schaffen. In den Bildern 2a bis 2d seien einige Möglichkeiten für die grundsätzliche Querschnittsbildung eines Langerbalkens als Seitenträgerbrücke skizziert.

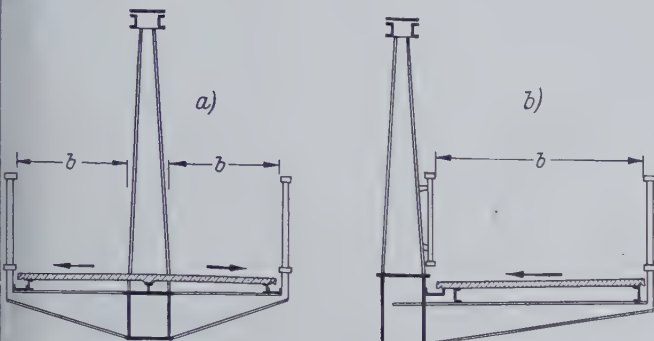


Bild 1. Vergleich zwischen Mittelträgerbrücke und Seitenträgerbrücke im Querschnitt

Als Nachteil könnte angeführt werden, daß Brücken dieses Systems aus psychologischen Gründen von Fußgängern ungern angenommen werden und wegen der einseitigen Auskragung sehr schwingungsempfindlich sind. Bei der Benutzung der Mittelträgerbrücken in Wanne-Eickel [5] und in Meppen [6] zeigte es sich aber, daß bei diesen Brücken die Torsionsschwingungen praktisch nicht zu spüren sind, wohl aber die Biegeschwingungen im Viertelpunkt. Dabei muß man noch berücksichtigen, daß die Brücke in Wanne-Eickel kein Bodenblech hat.

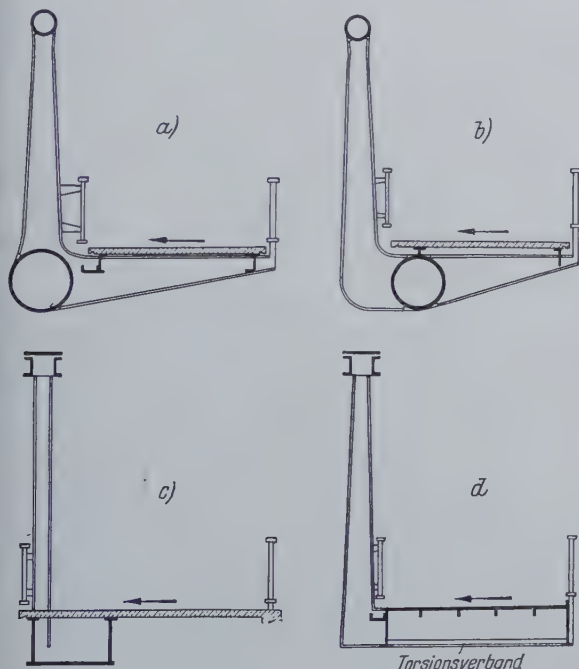


Bild 2. Querschnittsformen von Seitenträgerbrücken

Neben der Anwendung beim Bau neuer Fußgänger- und Straßenbrücken kommt das System dort in Frage, wo trotz besonders schlechter Platzverhältnisse das Tragwerk neben bestehenden Bauten errichtet werden soll, die Herstellung neuer Gründungsräume aber aus praktischen, konstruktiven oder wirtschaftlichen Gründen nicht möglich ist. In vielen Fällen wird es dann leicht möglich sein, den Seitenträger an seinen Enden mit dem bestehenden Bauwerk zu verbinden und die Auflagerkräfte in das bestehende Bauwerk einzuleiten.

Sollen außer dem Verkehrsweg Versorgungsleitungen überführt werden, so lassen sich diese meist ohne Schwierigkeiten auf der dem Verkehrsweg gegenüberliegenden Seite unterbringen. Sie sind

dann jederzeit zugänglich und können gut unterhalten werden. Kleine Leitungen können auch unter den Konsolen verlegt werden, falls dies erwünscht ist.

### 3. Statische und konstruktive Gesichtspunkte

Das statische Verhalten der Seitenträger ist klar und übersichtlich. Neben den Biegemomenten und Normalkräften treten zusätzlich Torsionsmomente auf, deren Verlauf sich eindeutig ermitteln läßt. Liegen Bogen und Versteifungsträger nicht in einer Ebene (Bild 2b bis 2d), treten außerdem horizontale Momente auf, deren Aufnahme durch die Konstruktion bei den in Frage kommenden Abmessungen keine Schwierigkeiten bereitet.

Die Verdrehung aus Verkehrslast ist gering. Bei Brücken bis etwa 2,5 m Konsolenausladung ist sie nicht größer als bei einem Tragwerk üblicher Bauart mit zwei Tragwänden ohne Hohlkasten. Bei größeren Ausladungen muß man gegebenenfalls die Abmessungen des Hohlkastens so wählen, daß die gewünschte maximale Verdrehung eingehalten wird.

Aus psychologischen Gründen wird man die Querneigung der Abdeckung nach innen legen (Bild 1b), um für den Benutzer der Brücke den Eindruck des Abrutschens nach außen zu vermeiden. Auch läßt sich an der Innenseite das Regenwasser besser ableiten, da man hier eine Regenrinne unauffälliger und bequemer anbringen kann.

Konstruktiv bietet eine Seitenträgerbrücke keine größeren Schwierigkeiten als eine Mittelträgerbrücke. In den meisten Fällen ergeben sich sogar Vereinfachungen, da die Durchdringungen der Abdeckung durch die über der Fahrbahn liegenden Bauteile entfallen.

An den Enden der Brücke werden zweckmäßig kräftige Endquerträger angeordnet, die die Torsionsmomente in die Lager leiten. Ist eine solche Ausbildung nicht möglich, da Lager unter den Konsolen unerwünscht sind, so kann der Hohlkasten auch anders eingespannt oder sogar direkt mit dem Fundament fest verbunden werden.

Zur Erzielung geringer Torsionsmomente aus Eigengewicht wird man leichte Abdeckungen wählen. Bleche und Gitterroste bieten sich hier besonders an. Nur bei besonders schmalen Brücken kann man mit wirtschaftlichem Vorteil auch Betonplatten verwenden.

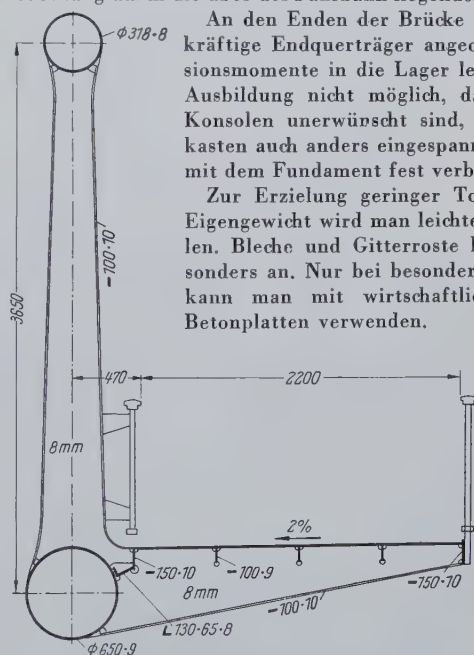


Bild 3. Querschnitt in Brückenmitte

### 4. Beispiel

An einem Beispiel, das in seinen äußeren Abmessungen und in bezug auf das statische System (Langerbalken) einen Vergleich mit der Hasebrücke in Meppen [6] gestattet, seien einige statische Werte erläutert. Auf die Darstellung der Ansicht und des Grundrisses der Brücke sei verzichtet, da sie nichts Neues bieten. Bild 3 zeigt den Querschnitt in Brückenmitte. Die Aufnahme der Biegemomente und Normalkräfte sei hier nicht nachgewiesen.

#### 4.1 Verdrehung

Die Verdrehung in Brückenmitte beträgt unter voller Verkehrslast

$$\phi = \frac{M_D l/2}{2 G J_D} + \frac{M_D b}{3 E J}$$

Darin ist  $l = 36,50$  m,

$$M_D = 0,4 \cdot 2,2 \cdot 1,57 \cdot 18,25 = 25,2 \text{ tm},$$

$$G = 0,81 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2,$$

$$J_D = 4 \cdot 0,332^2 \cdot 0,009 / 2,01 = 0,00186 \text{ m}^4,$$

$$b = \text{Lagerabstand} = 2,5 \text{ m},$$

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2,$$

$$J = (36 \cdot 40,5^2 + 80^2 \cdot 64 / 12) \cdot 10^{-8} = 0,000931 \text{ m}^4.$$

$$\phi = 0,0164, \text{ das sind } 1,64 \text{ ‰}.$$



Die Verdrehung ist also kleiner als die übliche Querneigung auf Fußwegen (etwa 2%). Es bleibt deshalb selbst unter Vollast noch eine restliche Querneigung zum Hauptträger hin. Dadurch wird der Eindruck des „Abrutschens“ vermieden.

#### 4.2 Seitensteifigkeit des Bogens

Besondere Bachtung ist der Seitensteifigkeit des Bogens zu schenken. Da infolge des Fehlens der zweiten Tragwand keine Halbrahmen mehr möglich sind, muß deren Aufgabe von den Hängestangen in Verbindung mit dem Hohlkasten übernommen werden. Es sei hier ein Weg gezeigt, wie man näherungsweise die „Rahmensteifigkeit“, die nunmehr von der Wellenlänge des ausgeknickten Bogens abhängig ist, berechnen kann. Dabei sei die unterschiedliche Länge der Hängestangen vernachlässigt.

Aus der statischen Berechnung ergibt sich

$$H = 74 \text{ t}$$

und damit die größte Normalkraft im Bogen zu

$$S = 74 \frac{\sqrt{1 + 2,5^2}}{2,5} = 79,7 \text{ t.}$$

$$s = 365 \frac{\sqrt{1 + 2,5^2}}{2,5} = 394 \text{ cm.}$$

Der Hänger ist konisch. Sein Trägheitsmoment beträgt von oben nach unten in den Viertelpunkten bei

$x/l = 0,00$	733 cm <sup>4</sup> ,
0,25	1379 cm <sup>4</sup> ,
0,50	2280 cm <sup>4</sup> ,
0,75	3510 cm <sup>4</sup> ,
1,00	5100 cm <sup>4</sup> .

Unter der Last „1“ am oberen Ende beträgt die Verformung eines Hängers, wenn er unten eingespannt ist,

$$\delta_1 = \int (M^2 / EJ) dx.$$

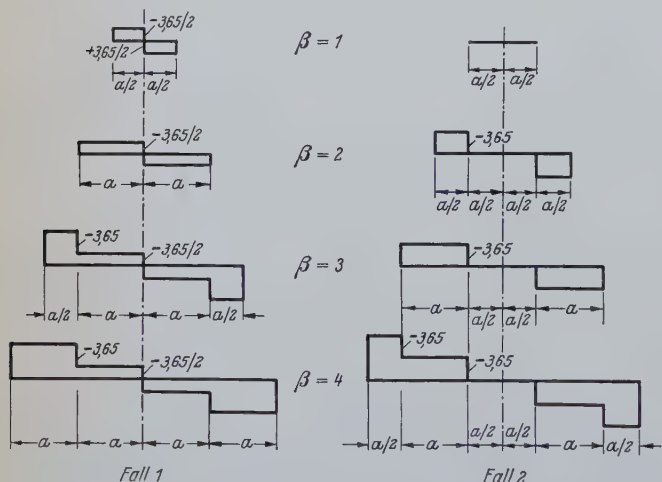


Bild 4. Verlauf des Drehmomentes unter den Lasten „1“ in Abhängigkeit von der Wellenlänge des ausgeknickten Bogens  
 $a$  = Abstand der Hänger (3,65 m). Systemhöhe des Bogens 3,65 m.

Das Integral wird zur Vereinfachung numerisch nach der Simpsonschen Regel ausgewertet.

$x/l$	$M$	$J_{\max}/J$	$n$	$M^2 \cdot n \cdot J_{\max}/J$
0	0,0	6,99	1	0
0,25	91,3	3,70	4	$12,3 \cdot 10^4$
0,50	182,5	2,24	2	$14,9 \cdot 10^4$
0,75	273,8	1,46	4	$43,8 \cdot 10^4$
1,0	365,0	1,00	1	$13,3 \cdot 10^4$
				$84,3 \cdot 10^4$

$$\delta_1 = 84,3 \cdot \frac{91,3}{3} \cdot \frac{10^4}{2100 \cdot 5100} = 2,39 \text{ cm/t.}$$

$\delta_2$  erhalten wir aus der Verformung des Versteifungsträgers in Abhängigkeit des Wertes  $\beta$ . Dabei ist  $\beta$  die halbe Wellenlänge des ausgeknickten Bogens. Für jedes  $\beta$  sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Der Bogen knickt symmetrisch zu einem Hänger aus.
2. Der Bogen knickt symmetrisch zur Mitte zwischen zwei Hängern aus.

Der ungünstigere Wert ist jeweils maßgebend.

Für die verschiedenen ganzzahligen Werte von  $\beta$  ergeben sich Drehmomente entsprechend Bild 4.

$\beta$	$\delta_2$ [cm/t] Fall 1	$\delta_2$ [cm/t] Fall 2
1	0,081	0,0
2	0,162	0,162
3	0,404	0,323
4	0,646	0,646

Die Zusammenstellung zeigt, daß die Werte  $\delta_2$  mit wachsendem  $\beta$  sehr schnell zunehmen. Andererseits wird die erforderliche Rahmensteifigkeit mit wachsendem  $\beta$  aber auch schnell kleiner.

Für die Gesamtverformung  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  erhalten wir

- $\beta = 1$   $\delta = 2,39 + 0,08 = 2,47 \text{ cm/t; } H = 0,405 \text{ t/cm;}$   
 $\beta = 2$   $\delta = 2,39 + 0,16 = 2,55 \text{ cm/t; } H = 0,392 \text{ t/cm;}$   
 $\beta = 3$   $\delta = 2,39 + 0,41 = 2,80 \text{ cm/t; } H = 0,357 \text{ t/cm;}$   
 $\beta = 4$   $\delta = 2,39 + 0,65 = 3,04 \text{ cm/t; } H = 0,329 \text{ t/cm.}$

Nun wird in der üblichen Weise der erforderliche Wert  $H$  bestimmt. Im vorliegenden Fall ist mit

$$J_{\text{Bogen}} = 9370 \text{ cm}^4 \quad F_{\text{Bogen}} = 77,9 \text{ cm}^2$$

$$W_{\text{Bogen}} = 589 \text{ cm}^4 \quad i_{\text{Bogen}} = 11,0 \text{ cm}$$

für ein Rohr  $\phi 318 \cdot 8$  entsprechend der DIN 4114

$$\omega = 1,4 \cdot 77,9 / 79,7 = 1,36,$$

$$\lambda = 66,$$

$$\text{zul } \beta = 11,0 \cdot 66 / 394 = 1,84.$$

Dazu gehört  $\nu_k = 2,27$ .

$$\text{erf } H_o = \frac{2,5 \cdot 2,27 \cdot 79,7}{1,86^2 \cdot 365} = 0,367 \text{ t/cm.}$$

Die vorhandene Seitensteifigkeit erhalten wir aus der obigen Zusammenstellung, wenn wir eine lineare Interpolation als zulässig betrachten, zu  $H = 0,394 \text{ t/cm}$ . Sie ist also im vorliegenden Fall ausreichend.

Bei der Berechnung der Alleestraßenbrücke in Wanne-Eickel [2] wurde für das Knicken aus der Bogenebene das Moment aus der seitlichen Außermitteigkeit des Bogens infolge der Verdrehung des Tragwerkes berücksichtigt. Soll auch hier so verfahren werden, so ergibt sich mit

$$\vartheta_1 = 0,0164 \text{ (aus Verkehrslast)}$$

$$\vartheta_2 = 0,0048 \text{ (aus Wind)}$$

die seitliche Verschiebung  $e$  zu

$$e = 365 \cdot 0,0212 = 7,74 \text{ cm.}$$

$$M = 74 \cdot 7,74 = 573 \text{ t/cm.}$$

Hier kann mit dem Horizontalschub gerechnet werden, da die größte Außermitteigkeit in Brückenmitte auftritt.

$$\sigma_M = 0,9 \cdot 573 / 980 = 0,526 \text{ t/cm}^2 \text{ (Rohr } \phi 368 \cdot 10)$$

$$\text{zul. } \sigma_N = 1,400 - 0,526 = 0,874 \text{ t/cm}^2$$

$$\omega = 0,874 \cdot 112 / 74 = 1,32$$

$$\lambda = 62$$

$$\beta = 62 \cdot 12,7 / 365 = 2,15$$

$$\text{erf. } H_o = \frac{2,5 \cdot 2,21 \cdot 74}{2,15^2 \cdot 365} = 0,242 \text{ t/cm}$$

Die erforderliche Rahmensteifigkeit ist in diesem Fall erst bei einem Rohr  $\phi 368 \cdot 10$  vorhanden.

Ob das horizontale Biegemoment voll zu berücksichtigen ist, wäre durch eine genauere Untersuchung zu klären. In diesem Fall wäre auch festzustellen, wie groß der Einfluß bei zweiwandigen Tragwerken ist, deren Querneigung bei schmalen Brücken in der gleichen Größenordnung liegt wie im oben beschriebenen Fall. Das angeführte Beispiel soll nicht dazu dienen, diese Frage zu klären. Es soll lediglich zeigen, wie im Fall eines Seitenträgers (und ebenso eines Mittelträgers) die Rahmensteifigkeit näherungsweise berechnet werden kann.

Bei Seitenträgerbrücken kann man die seitliche Auslenkung unter Verkehrslast wesentlich vermindern, wenn man den Träger so verformt, daß er unter Vollast ganz in der vertikalen Ebene liegt. Man hätte dann das entsprechende Moment bei teilweiser Belastung der Brücke zu berücksichtigen, also in einem Lastfall, der eine kleinere Bogenkraft ergibt.

#### 4.3 Schwingungsuntersuchung

Eine besondere Beachtung verdient auch die Schwingungsuntersuchung eines solchen Systems. Es seien deshalb für die unbelastete



Brücke und für die Brücke unter Vollast die Eigenfrequenzen, getrennt für Biegeschwingungen und für Drehschwingungen, näherungsweise bestimmt.

Für die Biegeschwingung ist der antimetrische Fall maßgebend. Dafür ergibt sich mit  $G = 20 \text{ t}$  und  $J = 93\,160 \text{ cm}^4$  in Anlehnung an die Gleichungen, die in [7] angegeben werden

$$\delta = \frac{10 \cdot 18,25^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^7 \cdot 0,0932 \cdot 10^{-3}} = 0,0652 \text{ m}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{981}{0,8 \cdot 6,52}} = 13,7;$$

$$\omega \cdot T = 2n\pi = 6,283; \quad (n = 1)$$

$$T = 0,458 \text{ sec};$$

$$f_B = 2,18 \text{ sec}^{-1}.$$

Für die belastete Brücke erhalten wir entsprechend

$$T = 0,740 \text{ sec und } f_B = 1,35 \text{ sec}^{-1}.$$

Für die Drehschwingung ergibt sich mit  $J_D = 186\,000 \text{ cm}^4$  und

$$J_p = \int r^2 dm = \frac{1300}{g} [\text{kg m}^2 \text{ sec}^2 / \text{m}] \quad (g = 9,81 \text{ m/sec}^2)$$

die Schwingungsdauer zu

$$T = 0,305 \text{ sec und die Frequenz zu}$$

$$f_D = 3,28 \text{ sec}^{-1}$$

für die unbelastete Brücke und

$$T = 0,490 \text{ sec und } f_D = 2,04 \text{ sec}^{-1} \text{ für die belastete Brücke.}$$

Um einen Vergleich mit den bestehenden Mittelträgerbrücken zu gestatten, seien die entsprechenden Zahlen auch für diese Brücken angegeben. Die Querschnittswerte wurden dabei den Abbildungen der Veröffentlichungen [5] und [6] entnommen.

	unbelastete Brücke		belastete Brücke	
	$f_B$	$f_D$	$f_B$	$f_D$
Seitenträger	2,2	3,3	1,4	2,0
Alleestraße	1,3	1,9	0,8	1,8
Hasebrücke	2,8	4,2	1,7	3,8

Es bedeuten dabei  $f_B$  = Frequenz der Biegeschwingung,

$f_D$  = Frequenz der Drehschwingung.

## Das Beulen eines Kreiszyllinders unter axialem Druck nach der nichtlinearen Stabilitätstheorie

Berichtet von cand. ing. Heinz Ebel, Darmstadt<sup>1)</sup>

DK 624.075.4 Beulen

### 1. Versuchsergebnisse und Ergebnisse der klassischen Stabilitätstheorie

Das Problem der Beulung des axial gedrückten Kreiszyllinders wurde zuerst von Lorenz (1908) und Timoshenko (1910) nach der klassischen Stabilitätstheorie behandelt. Sie fanden für lange und dünnwandige Zylinder die kritische Spannung

$$\sigma_k = 0,606 \cdot E \cdot t/R \text{ für } \mu = 0,3,$$

worin  $R$  den mittleren Radius und  $t$  die Wanddicke des Zylinders bedeutet. Die zugehörige Beulfläche hat ein schachbrettartiges Aussehen. Die nebeneinanderliegenden Beulen sind abwechselnd nach außen und innen gerichtet (Bild 1).

Beulversuche, die in großer Anzahl zur Nachprüfung der Theorie durchgeführt wurden, ergaben jedoch Beullasten, die oft nur ein Drittel des theoretischen Wertes erreichten

und die stark streuten. Auch eine Verfeinerung der Theorie durch W. Flügge [1], bei der die tatsächlichen Randbedingungen

### 5. Zusammenfassung

An Hand einiger Querschnittsskizzen wird ein Brückensystem erläutert, daß sich besonders für kleine und schmale Überbauten eignet. Es verbindet bei diesen die architektonischen Vorteile der Mittelträgerbauweise mit den verkehrstechnischen Vorteilen der ungeteilten Verkehrswege. Seine wirtschaftlichen Grenzen liegen dort, wo zur Einhaltung einer genügend geringen Verdrehung eine wesentliche Verstärkung erforderlich wird. In diesen Fällen ergeben sich auch kritische Torsionsschwingungen, die ebenfalls eine Einschränkung der Abmessungen erfordern.

An einem Beispiel, das einen Vergleich mit einer bestehenden Mittelträgerbrücke gestattet, werden einige wesentliche statische Werte erläutert und ein Weg angegeben, um die Sicherheit des Bogens gegen seitliches Ausknicken näherungsweise zu berechnen. Eine anschließende kurze Schwingungsberechnung zeigt, daß bei den gewählten Abmessungen die Eigenschwingungen nicht ungünstiger sind als bei den bestehenden Mittelträgerbrücken.

Zum Abschluß sei erwähnt, daß auf dem Gelände der Weltausstellung in Brüssel inzwischen eine Fußgängerbrücke als Seitenträger (doppelt abgespannter Balken) gebaut wurde. Die Brücke ist etwa 60 m lang und dient dem Zugang zu dem Pavillon der Bundesrepublik Deutschland. Ein Aufsatz über das Bauwerk erscheint in Kürze in dieser Zeitschrift.

### Schrifttum

- [1] Haupt, W.: Die Mittelträgerbrücke, eine neue Brückenform für den neuzeitlichen Schnellverkehr. Bautechnik 25 (1948) H. 2 S.25/31, H. 3 S.60/65.
- [2] Walting, F. W.: Österleden—Stockholm, Brückenbauliche Studien zum internationalen Wettbewerb 1949 und zur Ausstellung 1950. Bautechnik 28 (1951) H. 2 S.33/37 und H. 3 S.61/63.
- [3] Wahl, E. F.: Die neue Rheinbrücke Koblenz—Pfaffendorf. Bauingenieur 28 (1953), H. 8 S.265/72.
- [4] Beyer, E. u. Tussing, Fr.: Nordbrücke Düsseldorf. Stahlbau 24 (1955) H. 2 S.25/33, H. 3 S.63/67 u. H. 4 S.79/88.
- [5] Haupt, W. u. Kleinschmidt, H. J.: Die Alleestraßenbrücke in Wanne-Eickel. Stahlbau 24 (1955), H. 1 S.1/7.
- [6] Haupt, W.: Die Fußgängerbrücke über die Hase in Meppen. Stahlbau 25 (1956), H. 6 S.151/56.
- [7] Schleicher, F.: Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin 1955, S.1059.

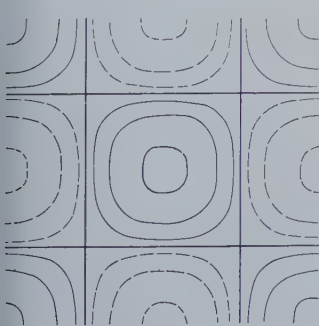


Bild 1. Beulfläche nach der klassischen Stabilitätstheorie

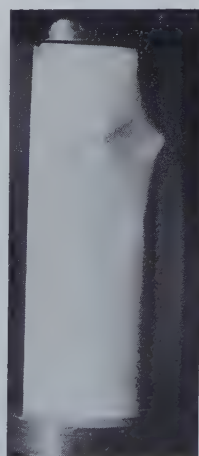


Bild 2. Rautenförmige Ausbeulung eines gedrückten Papierzylinders im formänderungsschlüssigen Versuch

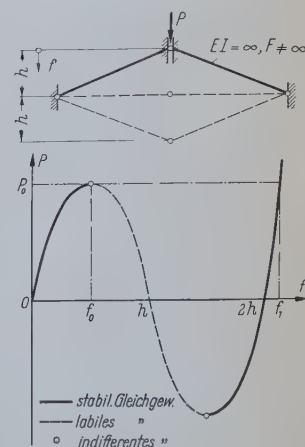


Bild 3. Durchschlagproblem mit zugehöriger Kraft-Verformungskurve

<sup>1)</sup> Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um die Wiedergabe eines Seminarvortrages, der innerhalb der Vortragsreihe „Behälterbau“ im Sommer-Semester 1957 am Lehrstuhl für Statik, Stahlbrücken- und Stahlhochbau der Technischen Hochschule Darmstadt unter Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Klöppel gehalten wurde.



sind. Nur ihre Grate stehen nach außen vor. Außerdem sinkt die Tragfähigkeit eines Zylinders nach dem Beginn des Ausbeulens schlagartig. Bei einem kraftschlüssigen Versuch, bei dem man die Beullast während des Ausbeulvorganges konstant auf den Zylinder einwirken läßt, wird dieser plötzlich stark zusammengedrückt, bis ein Ausbeulzustand erreicht ist, in dem die inneren Kräfte mit der Last einen zweiten stabilen Gleichgewichtszustand ausgebildet haben. Man bezeichnet derartige Stabilitätsprobleme als „Durchschlagprobleme“ im Gegensatz zu den häufigeren „Verzweigungsproblemen“, wie etwa dem des Knickstabes. Bild 3 zeigt ein einfaches Durchschlagproblem als Beispiel [2]. Steigert man die Last  $P$  langsam bis  $P_0$ , so schlägt sie plötzlich von  $f_0$  auf den zweiten stabilen Gleichgewichtszustand in  $f_1$  durch.

Die Versuche ließen auch eine große Empfindlichkeit der kritischen Last gegenüber Störungen, wie Abweichungen von der Normalform (Vorbeulen) oder Erschütterungen während der Versuchsdurchführung, erkennen.

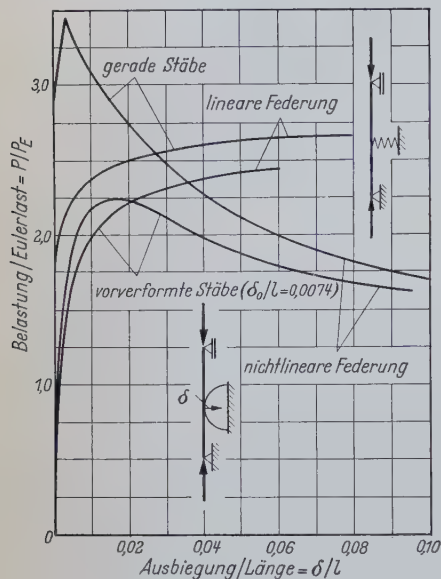


Bild 4. Kraft-Verformungskurven linear und nichtlinear gefederter Knickstäbe nach v. Karman

von kreisförmigen Federn entsprechen. Karman stellte also auf Grund von Versuchen die Kraft-Verformungskurve für einen Knickstab auf, der durch eine Halbkreisfeder versteift wird (Bild 4). Eine derartige Feder wirkt nicht linear, wie eine Spiralfeder, sondern sie wird um so weicher, je stärker sie eingedrückt, und um so härter, je mehr sie gelängt wird. Der Stab knickt deshalb immer nach dem Inneren des Federkreises. Entsprechend beult auch die Zylinderwand nur nach innen.

Die Kraft-Verformungskurven zeigten, daß die Tragfähigkeit des nichtlinear gefederten Stabes im Gegensatz zu der eines Stabes mit linearer Federung nach dem Beginn des Ausknickens rasch abnimmt und sich einem Minimalwert nähert. Ist die Stabachse schon von vornherein etwas in Richtung auf das Federinnere gebogen, so vermindert sich die Anfangsknicklast (kritische Last) erheblich, die minimale Knicklast ändert sich dagegen nur wenig. Die minimale Knicklast des geraden Stabes bildet also etwa eine untere Grenze für die Tragfähigkeit von vorverformten Stäben.

Karman folgerte aus diesen Untersuchungen, daß auch Zylinder eine minimale Beullast hätten, die für die Tragfähigkeit von Zylindern mit Vorbeulen oder anderen Störungen als eine untere Grenze angesehen werden könnte. Um diese zu finden, dehnte er die theoretische Untersuchung des Zylinderbeulproblems auf das überkritische Gebiet, also den ausgebeulten Zustand, aus. Dazu mußte er die klassische Stabilitätstheorie verlassen und die nichtlineare Theorie benutzen.

## 2. Die nichtlineare Stabilitätstheorie

Worin besteht nun der Unterschied zwischen der klassischen und der nichtlinearen Stabilitätstheorie? Erinnern wir uns an den gelenkig gelagerten Knickstab (Eulerfall II), der in der Vorlesung eingehend behandelt worden ist (Bild 5). Aus der Gleichgewichtsbedingung am verformten Stabelement (Theorie II. Ordnung)

$$M_x - P \cdot w_x = 0$$

folgt mit 
$$\frac{M_x}{E \cdot I} = - \frac{w''}{(1 + w_x'^2)^{3/2}}$$

die nichtlineare Differentialgleichung Bild 5. Knickstab (Eulerfall II)

$$w''_x + \frac{P}{E \cdot I} \cdot w_x \cdot (1 + w_x'^2)^{3/2} = 0, \dots (1)$$

aus deren Lösung die Kraft-Verformungskurve, z. B. als  $P \cdot w_m$  Kurve dargestellt (Bild 6), berechnet werden kann. Da wir mit einer

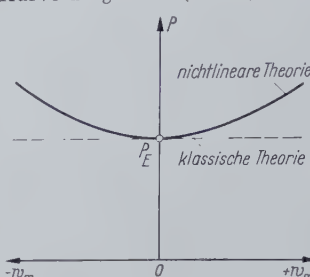


Bild 6. Kraft-Verformungskurve für den Eulerfall II nach der klassischen und der nichtlinearen Stabilitätstheorie (Verzweigungsproblem)

Eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung erzielen wir durch die Annahme

$$\frac{M_x}{E \cdot I} = - w''_x,$$

die elastostatische Biegegleichung der Baustatik, die jedoch nur für sehr kleine Ausbiegungen  $w$  gilt. Damit wird Gleichung (1) zu:

$$w''_x + \frac{P}{E \cdot I} \cdot w_x = 0 \dots (2)$$

Das ist eine lineare und homogene Differentialgleichung, zu der auch noch homogene Randbedingungen gehören. Mathematisch gesehen stellt sie ein Eigenwertproblem dar. Sie hat nämlich nur für einige bestimmte Werte von  $P$ , die Eigenwerte des Problems, Lösungen. Praktisch interessiert nur der kleinste Eigenwert, die kritische Last, für die also bei steigender Belastung zum ersten Mal die Möglichkeit des Ausknickens besteht:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}.$$

Die zugehörige Eigenfunktion gibt die Form der Knickbiegeline an. Während für alle kleineren Lasten nur die triviale Lösung  $w = 0$  die Differentialgleichung (2) befriedigt, läßt sich diese unter der Eulerlast  $P_E$  für beliebige Werte von  $w$  lösen. Die Lösung des Eigenwertproblems ergibt also eine Gerade durch  $P_E$  parallel zur Abszisse  $w$  (Bild 6). Da diese Gerade aber auf der vereinfachten Biegegleichung beruht, gibt sie die physikalischen Verhältnisse nur für unendlich kleine Ausbiegungen  $w$  exakt wieder. Ebenso gilt die Form der Knickbiegeline nur für unendlich kleine Amplituden. Den tatsächlichen Verlauf des Ausknickens gibt uns dagegen die  $P \cdot w_m$ -Kurve an, die mit Hilfe der nichtlinearen Theorie gewonnen wurde (wenn wir von Plastizitätsercheinungen absehen). Die linearisierte, „klassische“ Stabilitätstheorie verhält sich also zur nichtlinearen Theorie wie eine Fiktion zur physikalischen Realität.

In den meisten Fällen genügt die klassische Theorie vollauf, da nur die kritische Last gesucht wird, unter der das Ausknicken oder Ausbeulen beginnt. Diese gibt die klassische Theorie exakt wieder. In allen Fällen, in denen auch über den Verlauf des Knickvorganges Aussagen benötigt werden, sei es, daß mit dem Beginn des Ausknickens die Tragfähigkeit noch nicht erschöpft ist, oder daß ein Durchschlagproblem vorliegt, ist die nichtlineare Theorie zu benutzen. Beide Theorien sind aber Theorien II. Ordnung bezüglich der Verformung  $w$ .

Wenden wir uns jetzt ebenen Stabilitätsproblemen zu, die sich von Schalenbeulproblemen nur wenig unterscheiden. Als Beispiel diene uns die in  $x$ -Richtung gedrückte Beulplatte nach Bild 7. Aus Gleichgewichtsbetrachtungen für die im Falle eines Ausbeulens senkrecht zur Mittelfläche wirkenden Kräfte (Theorie II. Ordnung) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{N}{t} \cdot \Delta w = \sigma_x^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \tau_{xy}^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3)$$

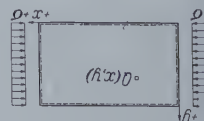


Bild 7. Beulplatte

worin  $N$  die Plattensteifigkeit und  $t$  die Plattendicke bedeutet.  $\sigma_x^M$  und  $\tau_{xy}^M$  sind die Membranspannungen an einem Punkt  $Q(x, y)$ .



der Plattenmittelfläche. Aus Gleichgewichtsbetrachtungen für die Kräfte in der Mittelfläche, sowie den Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen in dieser Ebene ergibt sich die Airy'sche Spannungsdifferentialgleichung

$$\Delta \Delta F = 0, \dots \dots \dots (4)$$

aus der die Membranspannungen nach der Definition

$$\sigma_x^M = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy}^M = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

hervorgehen. In unserem Beispiel liefert die Spannungsgleichung (4) die Membranspannungen:

$$\sigma_x^M = -\sigma, \quad \sigma_y^M = 0, \quad \tau_{xy}^M = 0.$$

Setzen wir die Spannungen in die Differentialgleichung (3) ein, so bleibt diese linear und homogen. Ihre Lösung liefert als Eigenwert die kritische Beullast nach der klassischen Stabilitätstheorie.

Tatsächlich begingen wir eine Vereinfachung, als wir die Spannungen aus der für die ebene Platte, also bezüglich  $w$  nach Theorie I. Ordnung abgeleiteten Gleichung (4) bestimmten. Als erster hat Th. v. Karman (1910) die Spannungsdifferentialgleichung unter Berücksichtigung von  $w$  nach Theorie II. Ordnung aufgestellt. Sie lautet:

$$\Delta \Delta F = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (4a)$$

Die Membranspannungen, die sich aus dieser Gleichung ergeben, haben für unser Beispiel die Form:

$$\sigma_x^M = f_x(w) - \sigma, \quad \sigma_y^M = f_y(w) \neq 0, \quad \tau_{xy}^M = f_{xy}(w) \neq 0.$$

Sie machen die Differentialgleichung (3) nichtlinear. Die Zusatzspannungen infolge der inhomogenen rechten Seite der Gleichung (4a) sind reine Eigenspannungen aus der Verzerrung der Beulfläche  $w(x, y)$ . Ist die Beulfläche abwickelbar, so haben sie den Wert Null, andernfalls wachsen sie mit der fortschreitenden Ausbeulung. Die Schnittkräfte können also mit der Last immer einen Gleichgewichtszustand ausbilden. Die Schnittkräfte nach der klassischen Theorie, die nicht mit  $w$  anwachsen, können das dagegen nur für unendlich kleines  $w$ , also die kritische Last.

Bei Plattenbeulproblemen überschreiten wir die Grenze zur nichtlinearen Theorie also schon, wenn wir konsequent die Verformungstheorie II. Ordnung anwenden, die sonst auch schon für die klassische Theorie erforderlich wird, hier aber teilweise verlassen werden konnte.

Wir haben die nichtlineare Stabilitätstheorie hier als eine Erweiterung der klassischen Stabilitätstheorie kennengelernt. Wir können sie aber auch als Elastizitätstheorie großer Verformungen  $w$ , angewandt auf Stabilitätsprobleme, definieren. Mit Hilfe der nichtlinearen Stabilitätstheorie soll ja die Gleichgewichtskurve zwischen den Kräften und endlichen Verformungen eines elastischen Systems bestimmt werden, eine Aufgabe, die der Elastizitätstheorie großer Verformungen zuzurechnen ist. Gegenüber Elastizitätsproblemen besteht nur noch die zusätzliche Aufgabe, daß festgestellt werden muß, wieweit sich die Kraft-Verformungs-Kurve in stabilem Gleichgewicht befindet und wo Indifferenzpunkte liegen, in denen das System in eine benachbarte (Verzweigungsproblem) oder eine entfernte (Durchschlagproblem) stabile Gleichgewichtslage überwechselt.

Die Nichtlinearität der Theorie kann natürlich noch weiter erhöht werden durch eine schärfere Approximation der geometrischen Beziehungen, wie beim Knickstab, oder die Einführung eines nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Gesetzes. Die Schwierigkeiten der praktischen Rechnung würden dadurch erheblich wachsen. Da wir nur mit dem niedrigsten Grad der Nichtlinearität arbeiten, wird unsere Rechnung die tatsächlichen Verhältnisse im Bereich großer Beulamplituden nicht mehr genau wiedergeben.

#### 5. Der Rechnungsvorlauf

Die nichtlineare Berechnung eines Platten- oder Schalenbeulproblems erfordert also die Lösung der beiden simultanen Differentialgleichungen (3) und (4a) oder einer aus ihnen herstellbaren Differentialgleichung achter Ordnung. Methoden zur exakten Lösung sind nicht bekannt.

Als Näherungsverfahren kommt Iteration oder eines der Energieverfahren nach Ritz oder Galerkin in Frage. Bei der Iteration werden die Rechnungsschwierigkeiten nach wenigen Schritten zu groß. Das Galerkinverfahren, das auf dem Prinzip der virtuellen Verschie-

bungen beruht, geht von den beiden Gleichungen (3) und (4a) aus, während das Ritzverfahren mit der Spannungsgleichung (4a) und dem Energiepotential des Systems im Gleichgewichtszustand arbeitet. Da sich das Potential mit Hilfe der zugehörigen Variationsbedingung für Gleichgewicht in die Differentialgleichung (3) überführen läßt, sind beide Verfahren gleichwertig. In gewissen Fällen bietet allerdings das Ritzverfahren einen Vorteil. Sogenannte „dynamische“ Randbedingungen gehen als Arbeitsausdrücke der Lagerreaktionen in das Potential mit ein. Da man deshalb diese dynamischen Randbedingungen beim Ritzansatz für die Beulfläche im Gegensatz zum Galerkinansatz nicht mehr im Voraus zu berücksichtigen braucht, wird das Ritzverfahren meist bevorzugt.

Wir wollen im folgenden mit dem Ritzverfahren arbeiten. Die Rechnung nimmt den Verlauf:

Zuerst wird die Membranspannungsgleichung und das Potential des Zylinders nach Theorie II. Ordnung bezüglich  $w$  aufgestellt. Für die Beulfläche wird ein Ansatz gemacht von der Form:

$$w(x, y) = f_0 + f_1 \cdot w_1(x, y) + f_2 \cdot w_2(x, y) + \dots$$

Die Funktionen  $w_n(x, y)$  werden dabei entsprechend der Randbedingungen der Beulfläche (abgesehen von etwaigen dynamischen Randbedingungen) und ihrer vermutlichen Form gewählt. Die Amplituden  $f_n$  werden unbestimmt gelassen. Mit diesem Ritzansatz gehen wir in die Spannungsgleichung ein und erhalten aus ihr die Spannungsverteilung in Abhängigkeit von den Unbekannten  $f_n$ . Der Ritzansatz und die Spannungen werden in das Potential eingesetzt und dieses ausintegriert. Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften am verformten Zylinder besteht, wenn die erste Variation des Potentials zu Null wird. Da das Potential  $\Pi$  jetzt aber nur noch von den Unbekannten  $f_n$  abhängt, wird diese Bedingung erfüllt durch:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Man erhält ein Gleichungssystem von  $n$  nichtlinearen und inhomogenen Gleichungen für die Unbekannten  $f_n$ . Für beliebige Werte der Belastung kann man daraus die zugehörigen  $f_n$ -Werte und somit die Form und Größe der Ausbeulung bestimmen. Das Ergebnis ist soweit genau, wie aus den vorgegebenen Funktionen  $w_n(x, y)$  eine gute Näherung für die wirklich auftretende Beulfläche herstellbar ist.

#### 4. Die Zylinder-Berechnung nach v. Karman und Tsien

Als erster hat L. H. Donnell [5] (1934) die nichtlineare Theorie für große Verformungen  $w$  des Kreiszyinders aufgestellt. Er wollte auf diese Weise das vorzeitige Versagen der Prüfzylinder auf Plastizitätserscheinungen infolge von Vorbeulen zurückführen, vereinfachte das Problem aber so stark, daß er kein befriedigendes Ergebnis erzielte. Th. v. Karman sah dagegen auf Grund seiner Versuche das vorzeitige Beulen als ein rein elastisches Problem an. Mit Hilfe der von Donnell entwickelten Gleichungen berechnete er zusammen mit H. S. Tsien [4] (1941) den Verlauf der Kraft-Verformungskurve des idealen Zylinders. Dabei benutzte er das Ritzverfahren.

Obwohl inzwischen weitergehende Arbeiten vorliegen, möchte ich die Rechnung an Hand der Karman-Tsien'schen Arbeit darlegen, da sie hier am besten verfolgt werden kann. Alle späteren Arbeiten folgen dem gleichen Weg.

##### 4.1 Voraussetzungen

Es wird ein vollkommen elastischer, dünnwandiger und langer Kreiszyinder angenommen. Daraus folgt, daß der Spannungszustand eben ist, die Randbedingungen ohne Einfluß auf die Beulverhältnisse sind (nach Versuchen ab  $l/R \gg 1,5$ ) und vor dem Beginn des Ausbeulens ein Membranspannungszustand angenommen werden kann.

##### 4.2 Bezeichnungen und Abkürzungen (Bild 8)

- $a = \pi \cdot R/m$  = Halbwelle in  $x$ -Richtung,
- $b = \pi \cdot R/n$  = Halbwelle in  $y$ -Richtung,
- $v = m/n$  = Seitenverhältnis der Beulen,
- $\sigma = p_x/t$  = axiale Druckbelastung,
- $f_0, f_1, f_2$  = Ritzkoeffizienten,
- $\delta$  = Beulenamplitude,
- $\epsilon$  = mittlere Stauchung des Zylinders,
- $\sigma \cdot R/E \cdot t$  = Beulwert,
- $\mu$  = Querdehnungszahl,
- $t$  = Wanddicke,
- $R$  = mittlerer Zylinderradius.



Integrationsbereich: Viermal von  $o$  bis  $a$  und von  $o$  bis  $b$ .

Abkürzungen:

$$\varrho = f_1/f_2, \quad \eta = n^2 \cdot t/R, \quad \xi = f_1 \cdot R/t = \delta/t.$$

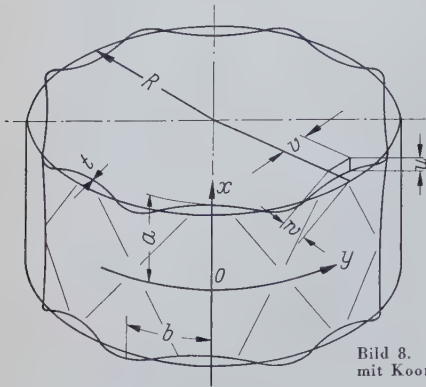


Bild 8. Beulfläche mit Koordinatensystem

#### 4.3 Die Grundbeziehungen

##### 4.31 Die Hooke'schen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

##### 4.32 Die geometrischen Gleichungen

Für die Zylindermittelfläche, die nur durch die Membrankräfte  $N$  beansprucht wird, gilt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xN} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yN} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xyN} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6a)$$

Die quadratischen Glieder sind für die Theorie II. Ordnung bezüglich  $w$  erforderlich. Alle Punkte der Wand außerhalb der Mittelfläche erhalten beim Ausbeulen noch zusätzliche Dehnungen infolge der Biegemomente  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xM} &= \frac{\partial u_M}{\partial x} = \frac{\partial \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yM} &= \frac{\partial v_M}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xyM} &= -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6b)$$

Hierbei sind in  $\varepsilon_{yM}$  gewisse Glieder vernachlässigt worden, die nach Donnell in die Lösung nur mit  $1/n^2$  eingehen, wenn 1 die Größenordnung von  $\partial v / \partial y$  ist.

##### 4.33 Die Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Membrankräfte in der Zylindermittelfläche können annähernd durch die Bedingungen für eine Scheibe ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^M}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^M}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^M}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^M}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

##### 4.4 Die Spannungsgleichung

Aus den Hooke'schen Gleichungen (5), den geometrischen Gleichungen (6a) und den Gleichgewichtsbedingungen für die Zylindermittelfläche (7) erhält man die zuerst (1934) von Donnell gefundene Membranspannungsgleichung nach Theorie II. Ordnung:

$$\Delta \Delta F = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \dots \dots (4b)$$

Die Spannungen ergeben sich daraus nach derselben Definition, wie bei Gleichung (4).

#### 4.5 Aufstellung des Potentials

Der Ausdruck für das innere Potential lautet allgemein

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol.}} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dV. \dots \dots \dots (8)$$

Gleichung (5) in Gleichung (8) ergibt

$$\Pi_i = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{\text{Vol.}} [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\mu) \cdot (\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y - \gamma_{xy}^2)] dV. \dots (9)$$

Darin bedeutet:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xN} + \varepsilon_{xM}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{yN} + \varepsilon_{yM}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xyN} + \gamma_{xyM}$$

Bei Integration über die Wanddicke von  $z = -t/2$  bis  $z = +t/2$  werden alle Integrale über Produkte der Art:  $\varepsilon_N \cdot \varepsilon_M$  zu Null. Übrig bleiben nur die Integrale über die Quadrate:  $\varepsilon_N^2$  und  $\varepsilon_M^2$ . Wir können deshalb das innere Potential in zwei Teile aufspalten:

a)  $\Pi_{iN}$  = inneres Potential der Membranspannungen,

$$\Pi_{iN} = \frac{4 \cdot E \cdot t}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b [(\varepsilon_{xN} + \varepsilon_{yN})^2 - 2(1-\mu) \cdot (\varepsilon_{xN} \cdot \varepsilon_{yN} - \gamma_{xyN}^2)] dx dy \dots (10)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5) können wir umformen

$$\Pi_{iN} = \frac{4 \cdot t}{2E} \int_0^a \int_0^b [(\sigma_x^M + \sigma_y^M)^2 - 2(1+\mu) \cdot (\sigma_x^M \cdot \sigma_y^M - \tau_{xy}^2)] dx dy \dots (11)$$

Darin sind  $\sigma_x^M$ ,  $\sigma_y^M$  und  $\tau_{xy}^M$  die Membranspannungen, die aus Gleichung (4b) gewonnen werden.

b)  $\Pi_{iM}$  = inneres Potential der Biegespannungen,

$$\Pi_{iM} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{\text{Vol.}} [(\varepsilon_{xM} + \varepsilon_{yM})^2 - 2(1-\mu) \cdot (\varepsilon_{xM} \cdot \varepsilon_{yM} - \gamma_{xyM}^2)] dV \dots (12)$$

mit den Dehnungen aus den Gleichungen (6b) und nach Integration über  $z$  von  $-t/2$  bis  $+t/2$  ergibt sich

$$\Pi_{iM} = \frac{4 \cdot N}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \cdot \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots (13)$$

mit  $N = E \cdot t^3/12 (1-\mu^2)$  als Plattensteifigkeit.

Das Potential der äußeren Arbeit lautet:

$$\Pi_a = -4 \cdot t \cdot \int_0^b \sigma_x^M \Big|_{x=a} dy \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx, \dots \dots \dots (14)$$

und das Gesamtpotential:

$$\Pi = \Pi_{iN} + \Pi_{iM} + \Pi_a,$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{2 \cdot t}{E} \cdot \int_0^a \int_0^b [(\sigma_x^M + \sigma_y^M)^2 - 2(1+\mu) \cdot (\sigma_x^M \cdot \sigma_y^M - \tau_{xy}^2)] dx dy + \\ &+ 2N \cdot \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \cdot (1-\mu) \cdot \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \\ &- 4 \cdot t \cdot \int_0^b \sigma_x^M \Big|_{x=a} dy \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx. \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

##### 4.6 Gleichgewichtsbedingungen

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die Kräfte an einem Schalelement im Gleichgewicht stehen, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten der inneren und äußeren Kräfte und somit die erste Variation des gesamten Potentials (15) verschwindet:

$$\delta \Pi = 0. \dots \dots \dots (16)$$

Führt man diese Variation durch, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen (7) für die Membrankräfte, sowie eine der Gleichung



der Platte entsprechende Differentialgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte senkrecht zur Mittelfläche.

Im Ritzverfahren benutzen wir die Gleichgewichtsbedingung (16) gegen direkt zur näherungsweisen Bestimmung der Beulfläche  $x, y$ ) aus dem Potential selbst.

Die Art des Gleichgewichtszustandes kann mit Hilfe der zweiten Variation des Potentials festgestellt werden. Stabiles Gleichgewicht liegt vor, wenn jede kleine Störung des Gleichgewichtszustandes zu einer Potentialvergrößerung führt ( $\Pi = \text{Min}$ ). Bewirkt irgendeine kleine Störung eine Potentialverkleinerung, so besteht labiles, bewirkt sie gar keine Änderung des Potentials, so besteht indifferentes Gleichgewicht. Da die erste Variation für Gleichgewicht sowieso Null ist, hängt die Potentialdifferenz  $\Delta \Pi = \delta \Pi + \delta^2 \Pi$ , die infolge einer solchen Störung auftritt, nur noch von der zweiten Variation ab. Es gilt also für

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabiles Gleichgewicht} \quad \delta^2 \Pi > 0 \quad (\Pi = \text{Minimum}), \\ \text{indifferentes Gleichgewicht} \quad \delta^2 \Pi = 0, \\ \text{labiles Gleichgewicht} \quad \delta^2 \Pi < 0. \end{array} \right\} \quad (16a)$$

In der klassischen Theorie wird die kritische Last, also der erste Differenzpunkt der Last-Verformungskurve gesucht. Für diesen Punkt gilt die erweiterte Bedingung:  $\delta^2 \Pi = 0 = \text{Minimum}$ . Man arbeitet also mit der zweiten Variation des Potentials (15). Das wurde in der Vorlesung bekannte „Bryan-Timoshenko-Potential“ für den ersten Indifferenzpunkt, mit dem in der klassischen Theorie gerechnet wird, ist deshalb nicht mit unserem allgemeinen Potential (15) identisch, sondern entspricht seiner zweiten Variation, die ihm sehr ähnlich sieht.

In der nichtlinearen Theorie, in der der gesamte Verlauf der Gleichgewichtskurve zwischen Last und Verformung gesucht wird, benötigt man dagegen die allgemeine Gleichgewichtsbedingung  $\delta \Pi = 0$ .

#### Der Ritzansatz

Wir wählen einen Ansatz der Form

$$w = f_0 + f_1 \cdot w_1 + f_2 \cdot w_2$$

in  $f_0, f_1$  und  $f_2$  unbestimmte Koeffizienten sind. Da wir den Einfluß der Ränder vernachlässigen, brauchen die vorzugehenden Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  keine speziellen Randbedingungen zu befriedigen. Die Unbekannte  $f_0$  erlaubt eine radiale Ausdehnung der Zylindermittelfläche. Wie die Versuche gezeigt haben, ist die Beulfläche bei gleicher Amplitude raufenförmig (Bild 2), was durch den Ansatz

$$\begin{aligned} w &= \cos^2 \left( \frac{mx + ny}{2R} \right) \cdot \cos^2 \left( \frac{mx - ny}{2R} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{1}{4} \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \frac{1}{4} \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

faßt wird.

Der Ansatz muß aber auch für unendlich kleine Amplituden gelten, so daß die schachbrettartige Beulform (Bild 1) nach der klassischen Theorie enthalten ist:

$$w = \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) = \frac{1}{4} \left[ \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right]$$

Der gesamte Ritzansatz lautet somit:

$$\begin{aligned} w &= \left( f_0 + \frac{f_1}{4} \right) + \frac{f_1}{2} \left[ \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{1}{4} \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \frac{1}{4} \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] \\ &+ \frac{f_2}{4} \left[ \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] \quad \dots (17) \end{aligned}$$

Nach dem Verhältnis der  $f$ -Werte zueinander kann er eine mehrstufen- oder mehrschachbrettförmige Beulform darstellen.

#### Die Spannungsverteilung

Einsetzt man Gleichung (17) in die Spannungs-Differentialgleichung (4b) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F &= -E \cdot \nu^2 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^2 \cdot \left[ A \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + B \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) + C \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + D \cdot \cos \left( \frac{3mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + G \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{3ny}{R} \right) + H \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right], (18) \\ A &= \frac{1}{8} f_1^2 \cdot n^2 - \left( \frac{1}{2} f_1 + f_2 \right), \quad D = \frac{1}{4} f_1 \cdot n^2 \cdot \left( \frac{1}{2} f_1 + f_2 \right) \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{8} f_1^2 \cdot n^2, \quad G = D$$

$$C = \frac{1}{2} f_1 \cdot n^2 \cdot \left( \frac{1}{2} f_1 + f_2 \right) - \frac{1}{2} f_1, \quad H = n^2 \cdot \left( \frac{1}{2} f_1 + f_2 \right)^2.$$

Die Partikulärlösung  $F_1$  der inhomogenen Differentialgleichung, die die Spannungen infolge der Verzerrungen der Beulfläche ausdrückt, ergibt sich aus einem Ansatz vom Typ der rechten Seite. Die Lösung  $F_0$  der homogenen Differentialgleichung  $\Delta \Delta F = 0$  muß nur noch den Spannungsanteil befriedigen, der in einer abwickelbaren Beulfläche, also infolge einer radialen Ausdehnung des Zylinders herrscht. Da die radiale Ausdehnung aber völlig unbehindert vor sich gehen kann, entspricht der Spannungszustand dem in einem nichtausgebulten Zylinder:

$$\sigma_x^M = -\sigma, \quad \sigma_y^M = 0, \quad \tau_{xy}^M = 0.$$

Diese Bedingungen werden durch die Lösung  $F_0 = -\sigma \cdot x^2/2$  befriedigt. Die Gesamtlösung lautet:

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 \\ F &= -E \nu^2 \cdot \left( \frac{R}{n} \right)^2 \cdot \left[ \frac{A}{16 \nu^4} \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \frac{B}{16} \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) + \frac{C}{(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{D}{(1 + 9 \nu^2)^2} \cos \left( \frac{3mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{G}{(9 + \nu^2)^2} \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{3ny}{R} \right) + \frac{H}{16(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] - \sigma \frac{x^2}{2} \quad \dots (19) \end{aligned}$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_x^M &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = E \nu^2 \left[ \frac{B}{4} \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) + \frac{C}{(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{D}{(1 + 9 \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{3mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) - \frac{9G}{(9 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{3ny}{R} \right) + \frac{H}{4(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] - \sigma, \quad \dots (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^M &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = E \nu^2 \left[ \frac{A}{4 \nu^2} \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) + \frac{\nu^2 C}{(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{9 \nu^2 D}{(1 + 9 \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{3mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{\nu^2 G}{(9 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{3ny}{R} \right) + \frac{\nu^2 H}{4(1 + \nu^2)^2} \cdot \cos \left( \frac{2mx}{R} \right) \cdot \cos \left( \frac{2ny}{R} \right) \right], \quad \dots (20b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^M &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = E \cdot \nu^2 \cdot \left[ \frac{C \cdot \nu}{(1 + \nu^2)^2} \cdot \sin \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \sin \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{D \cdot 3 \nu}{(1 + 9 \nu^2)^2} \cdot \sin \left( \frac{3mx}{R} \right) \cdot \sin \left( \frac{ny}{R} \right) + \frac{G \cdot 3 \nu}{(9 + \nu^2)^2} \cdot \sin \left( \frac{mx}{R} \right) \cdot \sin \left( \frac{3ny}{R} \right) + \frac{H \cdot \nu}{4(1 + \nu^2)^2} \cdot \sin \left( \frac{2mx}{R} \right) \cdot \sin \left( \frac{2ny}{R} \right) \right] \quad \dots (20c) \end{aligned}$$

#### 4.9 Das Potential

Bevor wir die Spannungen (20) in das Potential (15) einsetzen, müssen wir noch die Werte von  $\partial u / \partial x$  und  $\partial v / \partial y$  bestimmen. Aus den Gleichungen (5) und (6a) folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \dots (21a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R}, \quad \dots (21b)$$

Mit den Gleichungen (17) und (20) und nach trigonometrischen Umformungen ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left[ \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{2} n^2 \cdot \nu^2 \cdot \left( \frac{3}{32} \cdot f_1^2 + \frac{1}{8} f_1 f_2 + \frac{1}{8} f_2^2 \right) \right] + \text{Cosinus-Glieder}, \quad \dots (22a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = + \left[ \mu \cdot \frac{\sigma}{E} - \frac{1}{2} n^2 \left( \frac{3}{32} \cdot f_1^2 + \frac{1}{8} f_2^2 + \frac{1}{8} f_1 \cdot f_2 \right) + \left( f_0 + \frac{f_1}{4} \right) \right] + \text{Cosinus-Glieder}, \quad \dots (22b)$$

Bei der Integration von  $o$  bis  $a$  und von  $o$  bis  $b$  wird der Anteil der Cosinus-Glieder zu Null. Da  $y$  am Kreisumfang gemessen wird,



muß  $v$  eine periodische Funktion, der konstante Term in  $\partial v / \partial y$  also Null sein. Daraus folgt:

$$\left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right) = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{2} n^2 \cdot \left(\frac{3}{32} f_1^2 + \frac{1}{8} f_2^2 + \frac{1}{8} f_1 f_2\right). \quad (23)$$

Auf diese Art haben wir  $f_0$  in Abhängigkeit von  $f_1$  und  $f_2$  bestimmt.  $f_0$  ist also gar kein unbekannter Freiwert, wie  $f_1$  und  $f_2$ . Setzen wir jetzt  $w$  aus Gleichung (17),  $\sigma_x^M$ ,  $\sigma_y^M$  und  $\tau_{xy}^M$  aus Gleichung (20) und  $f_0$  aus Gleichung (23) in das Potential (15) ein und integrieren über  $x$  von 0 bis  $a$ , über  $y$  von 0 bis  $b$ , so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} p &= \nu^4 / (1 + \nu^2)^2, \\ q &= \nu^4 / (1 + 9\nu^2)^2, \\ r &= \nu^4 / (9 + \nu^2)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

für das Potential den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\Pi}{\frac{1}{2} E \cdot t \cdot a \cdot b} = & \left[ -4 \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 - \frac{\sigma}{E} \cdot n^2 \cdot \nu^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2\right) \right] + \\ & + \frac{n^4}{16} \left[ \left\{ \frac{1 + \nu^4}{8} + \frac{17}{4} p + q + r \right\} \cdot \frac{f_1^4}{4} + \left\{ \frac{9}{2} p + q + r \right\} \cdot \right. \\ & \cdot f_1^3 \cdot f_2 + \left\{ \frac{11}{2} p + q + r \right\} \cdot f_1^2 \cdot f_2^2 + 2p \cdot f_1 \cdot f_2^3 + \\ & + p \cdot f_2^4 \left. - \frac{n^2}{4} \left[ \left\{ \frac{1}{16} + p \right\} \cdot f_1^3 + \left\{ \frac{1}{8} + 2p \right\} \cdot f_1^2 \cdot f_2 \right] + \right. \\ & + \frac{1}{8} \left[ \left\{ \frac{1}{4} + 2p \right\} f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 \right] + \frac{1}{6(1 - \mu^2)} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 \cdot n^4 \cdot \left[ \left\{ \frac{1}{2} (1 + \nu^2)^2 + (1 + \nu^4) \right\} \frac{f_1^2}{4} + \right. \\ & \left. \left. + (1 + \nu^4) \cdot (f_1 \cdot f_2 + f_2^2) \right] \right] \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

#### 4.10 Das nichtlineare Gleichungssystem

Das Potential  $\Pi$  ist jetzt nur noch von den Freiwerten  $f_1$  und  $f_2$  abhängig, wenn wir für  $m$  und  $n$  konstante Werte vorgeben. Die einzige Variationsmöglichkeit besteht also in einer Veränderung von  $f_1$  und  $f_2$ . Aus der Gleichgewichtsbedingung (16):  $\delta \Pi = 0$  wird somit die Forderung:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} = 0.$$

Wir erhalten durch die Differentiation die beiden nichtlinearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t}\right) \cdot \eta \cdot \nu^2 \cdot \left(\varrho + \frac{3}{2}\right) &= (\eta \cdot \xi)^2 \cdot \left[\frac{1}{4} p \cdot \varrho^3 + \left\{\frac{11}{2} p + q + r\right\} \cdot \frac{\varrho^2}{4} + \right. \\ &+ \left\{\frac{9}{2} p + q + r\right\} \cdot \frac{3}{8} \varrho + \left\{\frac{1 + \nu^4}{8} + \frac{17}{4} p + q + r\right\} \cdot \frac{1}{8} \left. - \right. \end{aligned}$$

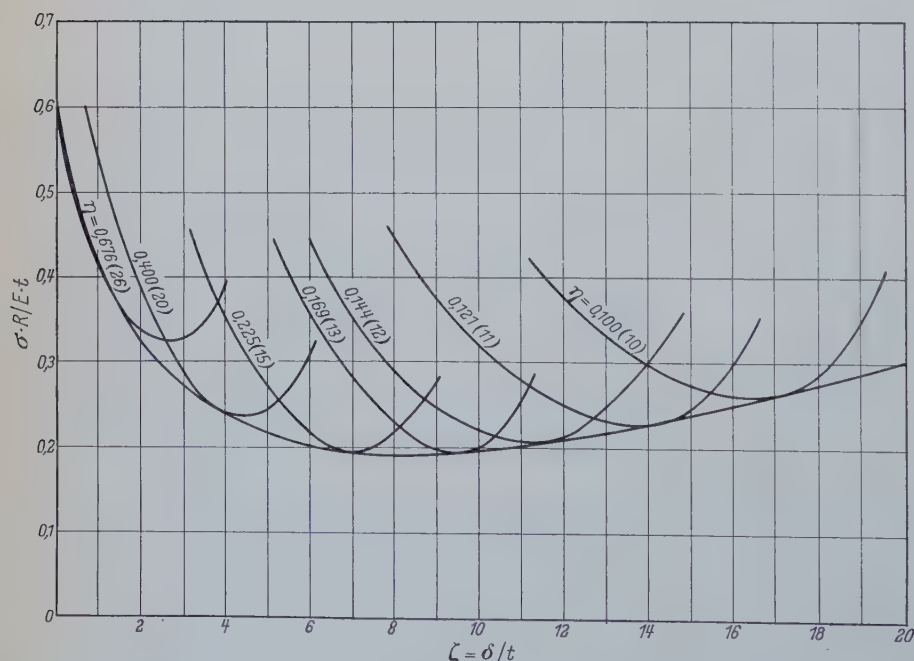


Bild 9. Der Beulwert  $\sigma \cdot R / E \cdot t$  als Funktion der Beulenamplitude  $\xi$  nach Karman-Tsien für  $\nu = 1,00$ ;  $\mu = 0,3$  und verschiedene Werte von  $\eta$  (in Klammern:  $n$  für  $R/t = 100$ )

$$- (\eta \cdot \xi) \cdot \left(\frac{1}{16} + p\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\varrho\right) + \frac{1}{4} \varrho + \frac{1}{8} + p + \frac{\eta^2}{3(1 - \mu^2)} \left\{ (1 + \nu^4) \cdot \left(\varrho + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} (1 + \nu^2)^2 \right\} \dots \dots (26a)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t}\right) \cdot \eta \cdot \nu^2 \cdot \left(\varrho + \frac{1}{2}\right) &= (\eta \cdot \xi)^2 \cdot \left[ \frac{1}{4} p \cdot \varrho^3 + \frac{3}{8} p \cdot \varrho^2 + \right. \\ &+ \left\{ \frac{11}{2} p + q + r \right\} \cdot \frac{\varrho}{8} + \left\{ \frac{9}{2} p + q + r \right\} \cdot \frac{1}{16} \left. - \right. \\ &- (\eta \cdot \xi) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{16} + p\right) + \frac{1}{4} \varrho + \frac{1}{8} + \frac{\eta^2}{3(1 - \mu^2)} \cdot \\ &\cdot (1 + \nu^4) \cdot \left(\varrho + \frac{1}{2}\right) \dots \dots \dots (26b) \end{aligned}$$

Der dimensionslose Wert  $\sigma \cdot R / E \cdot t$ , der die jeweils zu einer bestimmten Beulamplitude gehörige Belastung angibt, wird als Beulwert bezeichnet. Aus den Gleichungen (26a) und (26b) kann der Beulwert eliminiert werden. Man erhält dann:

$$A_3 \cdot \varrho^3 + A_2 \cdot \varrho^2 + A_1 \cdot \varrho + A_0 = 0,$$

mit  $A_3 = (\eta \cdot \xi)^2 \cdot (3p + q + r)$ ,

$$A_2 = \frac{3}{2} \cdot (\eta \cdot \xi)^2 \cdot (3p + q + r) - (\eta \cdot \xi) \cdot \left(\frac{1}{2} + 8p\right),$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot (\eta \cdot \xi)^2 \cdot \left(\frac{1 + \nu^4}{4} + p + q + r\right) - (\eta \cdot \xi) \cdot \left(\frac{1}{2} + 8p\right) - (4p - 1) - \frac{2\eta^2}{3(1 - \mu^2)} \cdot \left[2(1 + \nu^4) - \frac{1}{2}(1 + \nu^2)^2\right],$$

$$A_0 = \frac{1}{8} \cdot (\eta \cdot \xi)^2 \cdot \left(\frac{1 + \nu^4}{4} - 5p - q - r\right) + \left(2p - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\eta^2}{3(1 - \mu^2)} \cdot \left[(1 + \nu^4) - \frac{1}{4}(1 + \nu^2)^2\right].$$

Außerdem können die Gleichungen (26a) und (26b) zusammengefaßt werden, indem  $\varrho^3$  eliminiert wird.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t} = & + \left(\frac{p}{\eta \nu^2} + \frac{\nu^2 \cdot \eta}{12(1 - \mu^2) \cdot p}\right) + \frac{1}{\eta \nu^2} \left[ \left(\frac{\eta \xi}{2}\right)^2 \left\{ 4p + q + r \right\} \varrho^2 + \right. \\ & + \left\{ \left(\frac{\eta \xi}{2}\right)^2 \cdot (4p + q + r) - \left(\frac{\eta \xi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{16} + p\right) \right\} \cdot \varrho + \\ & + \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\eta \xi}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \nu^4}{4} + 4p + p + r\right) + \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{\eta \xi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{16} + p\right) \right\} \right] \dots \dots (28) \end{aligned}$$

Lassen wir in Gleichung (28) die Beulamplitude  $\delta$  gegen Null gehen d. h.  $\xi \rightarrow 0$ , so erhalten wir

$$\left. \frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t} \right|_{\xi \rightarrow 0} = \frac{p}{\nu^2 \cdot \eta} + \frac{\eta \cdot \nu^2}{p} \cdot \frac{1}{12(1 - \mu^2)} \dots \dots (29)$$

Das Minimum dieses Beulwertes in bezug auf  $m$  und  $n$  oder  $\eta$  und  $\nu$  liegt bei

$$\min \left. \frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t} \right|_{\xi \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} = 0,606$$

für  $\mu = 0,3$ , (30)

unter der Minimalbedingung

$$\eta \cdot \nu^2 \cdot (1 + \nu^2)^2 = 2 \sqrt{3(1 - \mu^2)}.$$

Gleichung (30) hat also als Sonderfall des (von der Ausbeulung  $w$  abhängigen) Beulwertes den kritischen Beulwert der klassischen Theorie für unendlich kleine Ausbeulungen ergeben. Wir wollen diesen mit „Anfangsbeulwert“ bezeichnen.

#### 4.11 Die numerische Auswertung

Wir geben für  $m$  und  $n$  und somit für  $\nu$  konstante Werte vor, legen also eine bestimmte Beulengröße fest. Gleichung (28) liefert für verschiedene Amplitudenverhältnisse  $\xi = f_1 \cdot R/t = \delta/t$  die Werte  $\varrho = f_2/f_1$ . In Gleichung (28) die zugehörigen Beulwerte, für



Die Gleichgewichte zwischen Last und Verformung besteht.

Bild 9 stellt den Beulwert in Abhängigkeit von der Beulenamplitude für  $\nu = 1$  und verschiedene Werte von  $\eta$  dar. Als Anfangsbeulwert ergibt sich der Beulwert der klassischen Theorie ( $\sigma \cdot R/E \cdot t = 0,606$  und als „minimaler Beulwert“ ( $\sigma \cdot R/E \cdot t = 0,194$ , ein Wert, der eher mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt, als der Anfangsbeulwert. Den wirklichen minimalen Beulwert erhält man, wenn man die Minimalwerte für eine Anzahl von Seitenverhältnissen  $\nu$  bestimmt und miteinander vergleicht.

Besser als die Beulenamplitude läßt sich im Versuch aus dem Abstand der Druckplatten der Prüfmachine die mittlere Zylinderstauchung  $\varepsilon$  ermitteln. Um den Beulwert in Abhängigkeit von der Zylinderstauchung darzustellen (Bild 10), benötigen wir

$$\varepsilon = -\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx \dots (31)$$

Aus Gleichung (31) und Gleichung (21a) erhalten wir die Transformationsformel

$$\varepsilon \cdot \frac{R}{t} = \frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t} + \frac{\nu^2}{16} \cdot \xi \cdot (\eta \cdot \xi) \cdot \left( \varrho^2 + \varrho + \frac{3}{4} \right) \dots (32)$$

Die Rechnung nach Karman-Tsien stellt gegenüber der Tragfähigkeitsberechnung nach der klassischen Theorie schon einen großen Fortschritt dar. Die Ergebnisse sind aber noch grob, da sich die Rechnung auf zwei Unbekannte beschränkt. Heute können mit Hilfe moderner Rechenautomaten auch große nichtlineare Gleichungssysteme gelöst werden, deren Behandlung vor fünfzehn Jahren noch nicht möglich war. So konnte die Anzahl der Unbekannten neueren Arbeiten erhöht werden. Eine dieser Arbeiten stammt von J. Kempner [6] (1953). An ihr möchte ich den neuesten Stand der Ergebnisse zeigen.

#### Rechnungsgang und Ergebnisse von J. Kempner

Gegenüber Karman und Tsien hat Kempner in seiner Arbeit [6] den Ritzansatz um einen Koeffizienten erweitert. Außerdem hat er den Extremwert des Potentials auch in bezug auf die Beulenzahl  $m$  und  $n$  ermittelt. Diese hängen ja auch von der Belastung ab. Schließlich hat er die ermittelte Beulkurve auf ihre Stabilität untersucht.

#### 1. Der Rechnungsgang

Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen der Karman-Tsien'schen Arbeit bei. Dann können auch die Spannungsdifferentialgleichung (4b) und das Potential (15) aus Abschnitt 4 übernommen werden.

#### 11. Die Differentialgleichung des Zylinders

Die Differentialgleichung der Zylinderfläche kann entweder aus Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten Zylinderelement für die Kräfte senkrecht zur Mittelfläche oder als Eulersche Differentialgleichung aus dem Potential (15) mit Hilfe der Variationsbedingung (16) gewonnen werden. Sie lautet

$$\frac{N}{t} \cdot \Delta w = \sigma_x^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \tau_{xy}^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y^M \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma_y^M \cdot \frac{1}{R} \dots (33)$$

#### 12. Der Ritzansatz

Einen günstigen Ritzansatz können wir uns beschaffen, indem wir die beiden simultanen Differentialgleichungen (4b) und (33) iterativ lösen. Als Ausgangsfunktion dient die Gleichung der schachbrettartigen Beulfläche der klassischen Theorie:

$$\frac{w_0}{R} = f^* \cdot \cos\left(\frac{mx}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \dots (34)$$

Setzen wir diese Gleichung in die Spannungsgleichung (4b) ein und lösen diese, so erhalten wir einen Ausdruck für die Spannungsfunktion  $F$  und daraus von  $w_0$  abhängige Spannungen  $\sigma_x^M$ ,  $\sigma_y^M$  und  $\tau_{xy}^M$ .

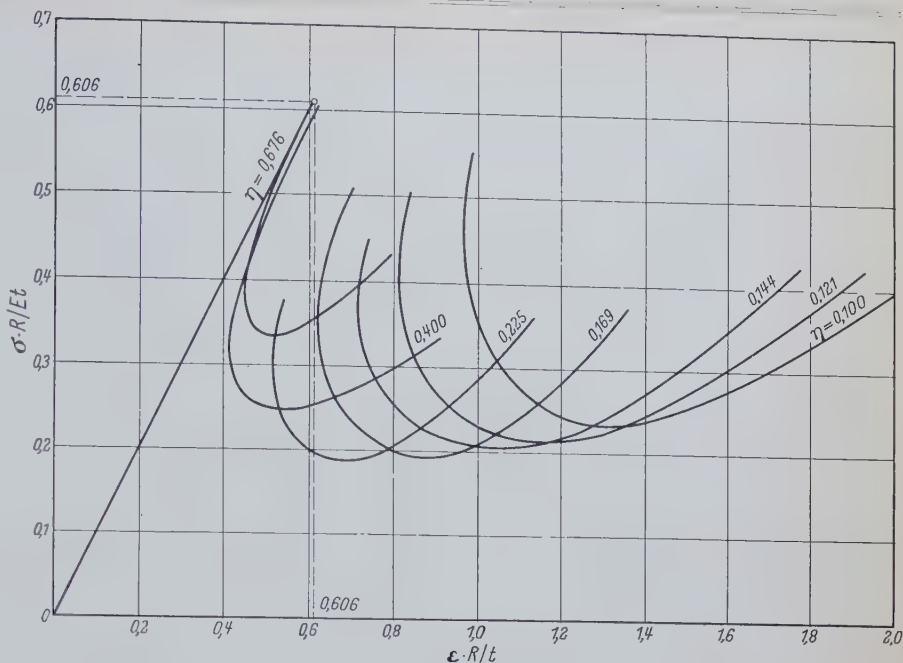


Bild 10. Der Beulwert  $\sigma \cdot R/E \cdot t$  als Funktion der Stauchung  $\varepsilon \cdot R/t$  nach Karman-Tsien für  $\nu = 1,00$ ;  $\mu = 0,3$  und verschiedene Werte von  $\eta$

Mit  $w_0$  und diesen Spannungen gehen wir in die Zylindergleichung (33) ein, deren Lösung einen verbesserten Ansatz für die Beulfläche darstellt ( $\xi = \delta/t$ ):

$$\frac{w}{R} = \xi \cdot t \left[ f_0 + \cos\left(\frac{mx}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + f_1 \cdot \cos\left(\frac{2mx}{R}\right) + f_2 \cdot \cos\left(\frac{2ny}{R}\right) + f_3 \cdot \cos\left(\frac{mx}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{3ny}{R}\right) + \dots \right] \quad (35)$$

Theoretisch kann man die Iteration der Beulfläche weiter fortführen, praktisch ist das aber zu schwierig. Die weitere Rechnung beruht deshalb auf dem Ritz-Verfahren. Als Ritzansatz dient Gleichung (35) bis  $f_2$ :

$$\frac{w}{R} = \xi \cdot t \left[ f_0 + \cos\left(\frac{mx}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{ny}{R}\right) + f_1 \cdot \cos\left(\frac{2mx}{R}\right) + f_2 \cdot \cos\left(\frac{2ny}{R}\right) \right] \dots (36)$$

Dieser Ansatz enthält fünf unbekannte Freiwerte, nämlich  $\xi$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $m$  und  $n$ .  $f_0$  ist kein Freiwert, da er von den anderen Werten abhängt. Für  $f_1 = f_2$  geht der Ansatz in den Karman-Tsien'schen Ansatz über.

#### 5.13 Die Spannungsverteilung

Mit dem Ritzansatz (36) gehen wir in die Spannungsgleichung (4b) ein. Ihre Lösung liefert die Membranspannungen:

$$\sigma_x^M = f_x(w) - \sigma, \quad \sigma_y^M = f_y(w), \quad \tau_{xy}^M = f_{xy}(w) \dots (37)$$

#### 5.14 Das Potential in Abhängigkeit vom Ritzansatz

Aus den Gleichungen (21), (36) und (37) lassen sich  $\partial u/\partial x$  und  $\partial v/\partial y$  berechnen. Mit Hilfe von  $\partial v/\partial y$  kann wie bei Karman  $f_0$  eliminiert werden. Der Ritzansatz (36), die Spannungen (37) und  $\partial u/\partial x$  werden in das Potential (15) eingesetzt und dieses wird integriert. Es ergibt sich

$$\Pi = \Pi(m, n, \xi, f_1, f_2, \sigma),$$

oder umgeformt

$$\Pi = \Pi(\nu, \eta, \xi, f_1, f_2, \sigma).$$

#### 5.15 Die Gleichgewichtsbedingung

Die Bedingung (16):  $\delta \Pi = 0$  wird erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} = 0 \text{ ist.}$$

Führen wir diese Differentiationen aus, so erhalten wir ein Gleichungssystem von fünf nichtlinearen und inhomogenen Gleichungen für die Freiwerte. Die Auswertung dieser Gleichungen ist sehr mühsam. Sie wurde von Kempner mit Hilfe eines Rechenautomaten vorgenommen. Die Beulkurve wurde dann wie bei Karman auf die Zylinderstauchung transformiert.



## 5.2 Diskussion der Ergebnisse

Die endgültige von Kempner aufgestellte Beulkurve in Abhängigkeit von der mittleren Zylinderstauchung ist in Bild 11 dargestellt. Außerdem enthält dieses Diagramm auch das maßgebende Seitenverhältnis  $\nu$  der Beulen in Abhängigkeit von der Stauchung.

Bei Betrachtung der Beulkurve wird deutlich, daß die klassische Theorie recht hat, wenn sie als Anfangsbeulwert 0,606 liefert, daß aber die kleinste Störung (Erschütterungen während des Belastungsvorganges oder Vorverformungen) genügen wird, um den Energiehügel zu überwinden, der sich zwischen der nur noch wenig stabilen Gleichgewichtslage auf der Belastungsgeraden und der stabilen Gleichgewichtslage des ausgebeulten Zustandes befindet. Da wir den Einfluß verschiedener Störungen nicht abschätzen können, müssen wir den minimalen Beulwert, der die kleinste Last angibt, unter der noch ein Durchschlagen des Zylinders stattfinden kann, als ungefähre untere Grenze für die Tragfähigkeit von Zylindern mit Störungen ansehen.

Der minimale Beulwert (für  $\mu = 0,3$ ) beträgt  $\frac{\sigma \cdot R}{E \cdot t}$  = 0,182 und stimmt etwa mit der unteren Grenze der Versuchsergebnisse überein. Er liegt bei  $\varepsilon \cdot R/t = 0,364$  und  $\nu = 362$ . Auch die Kurve der maßgebenden Seitenverhältnisse der Beulen entspricht den Erfahrungen. Zuerst bilden sich sehr hohe und schlanke Beulen ( $\nu < 1$ ), die dann mit wachsender Belastung immer niedriger und breiter werden ( $\nu > 1$ ).

Die Art des Durchschlagens beim Versuch läßt sich an Hand der Beulkurve ebenfalls erklären. Die meisten Versuche werden formänderungsschlüssig durchgeführt ( $\varepsilon = \text{const.}$ ), der Abstand der Druckplatten der Prüfmaschine während des Durchschlagens also nicht verändert. Tatsächlich sind die Prüfmaschinen selbst ja auch etwas elastisch, so daß der Zylinder etwa von  $P$  auf  $P_1$  durchgeschlagen wird. Beim kraftschlüssigen Versuch ( $\sigma = \text{const.}$ ), bei dem die Beulast während des Durchschlagens konstant auf den Zylinder einwirkt, wird dieser plötzlich von  $P$  auf  $P_2$  zusammengedrückt. Da in beiden Belastungsfällen der zweite Gleichgewichtszustand ein niedrigeres Energieniveau hat als der erste, setzt sich beim Durchschlagen ein Teil der elastischen Energie des Zylinders in Schwingungen um.

Die Beulkurve stellt eine Gleichgewichtskurve dar. Wieweit dieses Gleichgewicht stabil ist, kann mit Hilfe der Stabilitätsbedingung (16a)  $\delta^2 \Pi > 0$  ermittelt werden. Sie ist erfüllt, wenn alle fünf Determinanten, die sich aus den zweiten Ableitungen des Potentials nach den Unbekannten bilden lassen, „positiv definit“ sind. Das bedeutet, daß die Determinanten selbst und die vier führenden Unterdeterminanten jeder Determinante positive Werte haben müssen. Dabei werden entweder für  $\sigma$  oder  $\varepsilon$  konstante Werte eingesetzt. Determinanten lassen sich hier bilden, weil die Gleichungssysteme der zweiten Ableitungen alle linear sind.

Als Stabilitätsgrenzen ergeben sich die Indifferenzpunkte:

für  $\sigma = \text{const.}$  in  $\partial \sigma / \partial \varepsilon = 0$ ,

für  $\varepsilon = \text{const.}$  in  $\partial \varepsilon / \partial \sigma = 0$ .

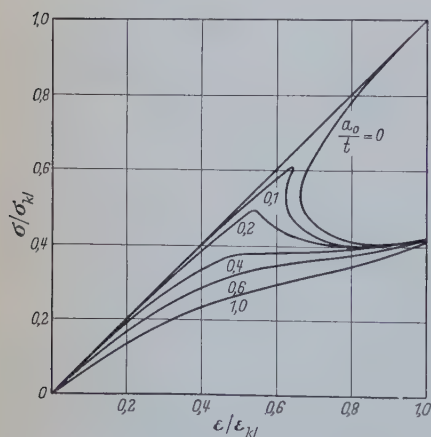


Bild 12. Spannungs-Stauchungskurven für verschiedene Amplitudenverhältnisse der Vorbeulen  $a_0/t$  nach Thielemann-Dreyer

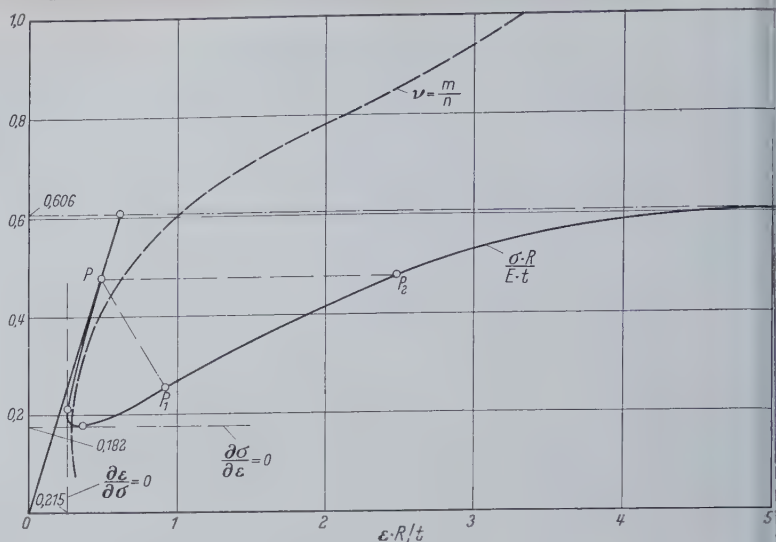


Bild 11. Beulwert  $\sigma \cdot R/E \cdot t$  und Seitenverhältnis  $\nu$  der Beulen als Funktion der Stauchung  $\varepsilon \cdot R/t$  nach Kempner

Stabiles Gleichgewicht besteht also rechts von  $\partial \sigma / \partial \varepsilon$ , für formänderungsschlüssige Versuche schon ab  $\partial \varepsilon / \partial \sigma$ , sowie auf der Belastungsgeraden des unausgebeulten Zustandes. Wie Bild 11 zeigt, fällt die Belastungsgerade in ihrem oberen Teil fast mit der labilen Gleichgewichtskurve zusammen, so daß sie dort praktisch auch als labil anzusehen ist.

## 6. Vorbeulen und Beulen im plastischen Bereich

Die bisherige Rechnung beruhte auf den Voraussetzungen einer idealen Ausgangsform des Zylinders, sowie eines ideal-elastischen Werkstoffes. Diese Voraussetzungen sind (1950) von L. H. Donnell [7] verlassen worden. Da seine Ergebnisse noch nicht völlig mit den Versuchsergebnissen übereinstimmten, unternahmen W. Thielemann und H. J. Dreyer [8] (1956) eine entsprechende Rechnung unter der Annahme einer anderen Vorbeulenverteilung, die eine bessere Annäherung an die Versuchsergebnisse brachte.

Die Annahme von Vorbeulen, also Vorverformungen des Zylinders im Ausgangszustand, führt zu einer Erweiterung der geometrischen Gleichungen (6a) der Mittelfläche um je ein zusätzliches Glied. Diese wirken sich in der Spannungsgleichung (4b) und dadurch in den Membranspannungen aus. Die Rechnung verläuft dann wie bei Karman, Thielemann und Dreyer nahmen an, daß die Vorbeulung zur späteren Beulfläche affin sei. Sie benutzten den gleichen Ritzansatz wie Kempner, beschränkten sich jedoch bei der Berechnung der Beulkurven auf zwei Freiwerte, indem sie für die anderen Unbekannten aus Abschätzungen gewonnene feste Werte vorgaben. Die von ihnen gefundenen Beulkurven Bild 12 und Bild 13 sind deshalb noch nicht als maßgebend anzusehen, obwohl sie die Versuchsergebnisse qualitativ schon gut erfassen. Die Veröffentlichung genauerer Kurven

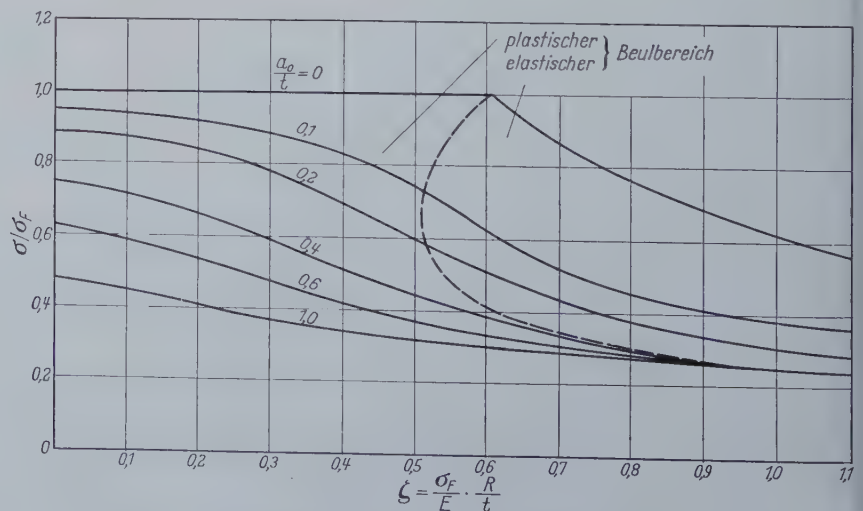


Bild 13. Tragfähigkeit gedrückter Zylinder in Abhängigkeit vom Zylinderkennwert  $\zeta$  und dem Amplitudenverhältnis der Vorbeulen  $a_0/t$  nach Thielemann-Dreyer



unter Berücksichtigung aller fünf Unbekannten, entsprechend der Kempnerschen Beulkurve, ist jedoch in Kürze zu erwarten.

Bild 12 stellt die Beulkurven für verschiedene Verhältnisse der Vorbeulenamplituden  $a_0$  zur Wanddicke  $t$  dar. Die Spannungen der Ordinate sind auf die klassische Beulspannung  $\sigma_{kl} = 0,606 \cdot E \cdot t/R$ , die Zylinderstauchung der Abszisse auf die klassische Stauchung  $\epsilon_{kl} = \sigma_{kl}/E$  bezogen. Nach diesem Diagramm liegt der minimale Beulwert des nicht vorgebeulten Zylinders bei  $0,606 \cdot 0,428 = 0,260$ , während sich bei der genaueren Rechnung der Kempnersche Wert 0,182 ergeben muß.

Bisher haben wir das vorzeitige Durchschlagen der Versuchszyylinder auf vermutete Störungen zurückgeführt, ohne diese in unserer Rechnung mit zu berücksichtigen. Jetzt sehen wir, wie stark schon kleine Vorbeulen den Anfangsbeulwert herabsetzen. Wir können also Vorbeulen als Hauptgrund für die Verringerung der Tragfähigkeit von Zylindern ansehen. Für einen Zylinder bekannter Vorbeulenamplitude kann deshalb die Tragfähigkeit mit dem Anfangsbeulwert der entsprechenden Beulkurve gleichgesetzt werden, wenigstens, solange sich der Beulvorgang noch im elastischen Bereich abspielt. Der Einfluß der Vorbeulen erklärt auch die starke Streuung von Versuchsergebnissen für Zylinder verschiedener Herstellungsart. Die Tragfähigkeit von nahtlos gezogenen Zylindern ist meistens viel größer, als die von geschweißten oder genieteten Zylindern, die naturgemäß stärker von der idealen geometrischen Form abweichen.

Die Tragfähigkeit eines Zylinders kann allerdings auch schon vor dem Erreichen des Anfangsbeulwertes erschöpft sein, wenn vorher Fließen eintritt. Donnell [7] bezeichnet diesen Vorgang als Beulen im elastischen Bereich. Als Grenze der Tragfähigkeit sieht er die Last an, unter der an der ungünstigsten Stelle der Zylinderwand, nämlich an der inneren Wandseite im Koordinatenursprungspunkt (nach Karman), Fließen eintritt. Das ist der Fall, wenn die nach Huber-Mises-Hencky für diesen Punkt errechnete Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2}$$

den Wert der Fließspannung  $\sigma_F$  erreicht. Die Spannungen setzen sich dabei nach Gleichung (5) aus den Membran- und Biegespannungen zusammen. Die Donnellsche Annahme entspricht der Annahme eines ideal-elastisch-ideal-plastischen Werkstoffes.

Beulen im plastischen Bereich ist besonders bei Zylindern mit großer Vorbeulenamplitude, niedriger Fließgrenze des Werkstoffes und großer Wanddicke zu erwarten. Zur Kennzeichnung dieser geo-

metrischen und Werkstoffeigenschaften dient der „Zylinderkennwert“  $\xi = \sigma_F \cdot R/E \cdot t$ . Thielemann und Dreyer [8] haben Kurven für die Tragfähigkeit von Zylindern in Abhängigkeit von der Vorbeulenamplitude und dem Zylinderkennwert aufgestellt (Bild 13). Als Maß für die Tragfähigkeit diente ihnen dabei im elastischen Bereich der jeweilige Anfangsbeulwert, im plastischen Bereich die Last, für die sich an der ungünstigsten Stelle  $\sigma_v = \sigma_F$  ergibt.

Sie schlagen vor, ähnlich wie für die unvermeidbare Außermittigkeit gedrückter Stäbe nach DIN 4114 für Zylinder eine von der Herstellungsgüte und dem Verhältnis  $R/t$  abhängige unvermeidliche Vorbeulenamplitude festzulegen, die bei der Bemessung mittels der Tragfähigkeitskurven (Bild 13) zu berücksichtigen wäre. Es handelt sich dabei hauptsächlich um zwei Güteklassen: nahtlos gezogene Rohre und genietete oder geschweißte Rohre. Zur Bestimmung derartiger Amplituden sind allerdings noch systematische Versuche sowie die verbesserten Tragfähigkeitskurven aus der Rechnung mit allen fünf Freiwerten notwendig.

Trotz der befriedigenden Ergebnisse, die uns also schon die Aufstellung praktischer Bemessungsformeln auf theoretischer Grundlage ermöglichen, ist die Forschung an dem Beulproblem des axial gedrückten Kreiszylinders damit nicht abgeschlossen. So ist der Einfluß der Randbedingungen auf die Tragfähigkeit kurzer Zylinder noch nicht geklärt, während das Beulen schwach ausgesteifter Zylinder, deren Steifen mit ausknicken, nach der nichtlinearen Theorie noch kaum behandelt worden ist.

#### Schrifttum

- [1] Flügg e, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, Springer-Verlag.
- [2] Flügg e, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Springer-Verlag.
- [3] v. Karman, Th., Dunn, L. G., Tsien, H. S.: The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 7 (1940) S. 276.
- [4] v. Karman, Th., Tsien, H. S.: The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 8 (1941) S. 303.
- [5] Donnell, L. H.: A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending. Trans. ASME, Vol. 56 (1934) S. 795.
- [6] Kempner, J.: Postbuckling Behaviour of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 21, Dezember 1954, S. 329.
- [7] Donnell, L. H., Wan, C. C.: Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders. Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, März 1950, S. 73.
- [8] Thielemann, W., Dreyer, H. J.: Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger, axial gedrückter Kreiszylinder. DVL-Bericht Nr. 17, Juni 1956.

## Verschiedenes

### Kolloquium am Lehrstuhl für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt

Neuere Erkenntnisse aus dem Gebiet der Festigkeitslehre und die numerische Berechnung von Ingenieuraufgaben mit Hilfe moderner elektronischer Rechenautomaten standen im Mittelpunkt des Kolloquiums, das am 23. 11. 1957 am Lehrstuhl für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt unter Leitung von Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Klöppel abgehalten wurde. Zahlreiche Vertreter von Behörden und aus der Industrie, vor allem aber die ehemaligen Schüler hatten sich eingefunden, um neue Anregungen zu empfangen. Wie im Wintersemester 1956/57<sup>1)</sup> fand auch diese Veranstaltung großen Anklang.

Seit den bekannten Schadensfällen an der Zoo-Brücke und an der Müdersdorfer Brücke infolge des Schweißens vor nahezu 20 Jahren und die Untersuchungen über das Festigkeitsverhalten unserer Stahlschalen nicht mehr zur Ruhe gekommen. Die auch heute noch vorkommenden Sprödbüche geben beredtes Zeugnis, wie wichtig diese Fragen für die Beurteilung der Sicherheit einer Konstruktion sind. Nachdem als Einflußgrößen für das Bruchverhalten neben den Materialeigenschaften die Temperatur, die Beanspruchungsgeschwindigkeit und der Spannungszustand feststanden, konzentrierten sich die Forschungen auf die Ermittlung der genaueren Abhängigkeiten. Es war ziemlich einfach, den Einfluß der Temperatur zu erfassen. Wesentlich größere Schwierigkeiten bereiteten dagegen die Untersuchungen über den Einfluß der Beanspruchungsgeschwindigkeit und besonders des Spannungszustandes. Versuche an zweiachsig beanspruchten zylindrischen Hohlproben waren nicht zufriedenstellend, gerade die 3. Spannungskomponente entscheidenden Anteil an

dem Festigkeitsverhalten des Werkstoffes hat. Die Erzeugung eines dreiachsigen Spannungszustandes und seine Kontrollierbarkeit während des Versuches stellt aber sehr hohe Anforderungen an den versuchsmäßigen Aufbau. Es ist daher erklärlich, wenn diese Frage bisher nur wenig behandelt wurde.

Nach einführenden Worten berichtete Professor Dr. A. Kochen-dörfer vom Max-Planck-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf über seine jüngsten Versuche auf diesem Gebiet in seinem Vortrag „Die Sprödbuchneigung der Stähle bei mehrachsiger Beanspruchung“, der sich aus einem Forschungsauftrag im Rahmen des Schwerpunktprogrammes „Konstruktiver Ingenieurbau“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft entwickelt hat. Um die gewünschte Dreiachsigkeit zu erreichen, verwendete er gekerbte Biegeproben, bei denen zunächst in Anlehnung an die Proben von Schnadt in der Druckzone ein gehärteter Stahlzylinder eingepaßt war, die aber im Gegensatz zu Schnadt zwei Kerben besaßen. Die Dreiachsigkeit entsteht hierbei durch die Behinderung der Querkontraktion. Wie spannungsoptische Versuche im elastischen Bereich ergaben, zeigten diese Proben gegenüber denen ohne Stahlzylinder die gleiche Spannungsverteilung, so daß die erhoffte Wirkung einer geringeren Streuung der Meßwerte ausblieb.

Die statischen Biegeversuche wurden daher an beiderseits gekerbten Proben ohne Stahlzylinder fortgesetzt, und zwar im Bereich der Temperatur des flüssigen Stickstoffes ( $-180^\circ$ ) bis Zimmertemperatur. Untersucht wurden zwei unruhig vergossene Thomasstähle und ein unruhig vergossener S-M-Stahl, je normalgeglüht und künstlich gealtert. Eine besonders entwickelte neuartige Biegemaschine garantierte bei den Versuchen ein über die Probenlänge

<sup>1)</sup> Ackermann, K.: Kolloquium am Lehrstuhl für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt. Stahlbau 26 (1957) H. 4, S. 117/118.



gleiches Moment. Aus den Dehnungsmessungen an den Oberflächen der Proben im gekerbten Querschnitt wurden dann die Spannungen mit Hilfe plausibler Annahmen über den Verlauf der Dehnungen im Innern der Proben elastizitätstheoretisch errechnet und hieraus die Vergleichsspannungen  $\sigma_v$  nach der Gestaltänderungsenergiehypothese von Huber-Mises-Hencky und der Mohrschen Schubspannungshypothese bestimmt. Für die Reduzierung des räumlichen Spannungszustandes auf die einachsige Vergleichsspannung  $\sigma_v$  eignen sich diese Hypothesen besonders, da sie in guter Übereinstimmung mit den Versuchen liefern, daß ein hydrostatischer Spannungszustand die Vergleichsspannung  $\sigma_v$  nicht beeinflußt.

Professor Kochendörfer ging zuvor auf die Frage ein, welche Kennzahl die Mehrachsichtigkeit eines Spannungszustandes am zweckmäßigsten und übersichtlichsten beschreibt. Ausgehend von der festigkeitstheoretischen Vergleichsspannung  $\sigma_v$ , die der Beurteilung des Fließverhaltens eines Werkstoffes dient, war von Schnadt das

Spannungsverhältnis  $\Pi = \frac{\sigma_v}{\sigma_1}$  eingeführt und als Plastizierungsvermögen

bezeichnet worden. Da diese Zahl aber auch gleichzeitig eine Aussage über die Art des Spannungszustandes macht (einachsiger Spannungszustand  $\Pi = 1$ , hydrostatischer Spannungszustand  $\Pi = 0$ ) schuf Kochendörfer als Kennzahl  $\kappa$  für die Mehrachsichtigkeit die Beziehung

$\kappa = 1 - \frac{\sigma_v}{\sigma_1} = 1 - \Pi$ . Hierbei ist  $\sigma_1$  die größte Hauptspannung. Mit den so ermittelten  $\kappa$ -Werten stimmen auch gut diejenigen

überein, die sich aus der Gleichung  $\kappa = 1 - \frac{\sigma_{Fk}}{\sigma_{F0}}$  ( $\sigma_{F0}$  Fließspannung

der ungekerbten,  $\sigma_{Fk}$  Fließspannung der gekerbten Probe) ergeben. Da  $\kappa$  mit  $\sigma_{Fk}$  über den Querschnitt veränderlich ist, wurde für  $\sigma_{Fk}$  ein Mittelwert  $\bar{\sigma}_{Fk}$  eingesetzt. Damit hoffte man, die eigentlich wirk-same Mehrachsichtigkeit zu erfassen. Als zweite Kennzahl für die Beschreibung des Spannungszustandes kommt aber auch die Kerbziffer

$k = \frac{a}{\rho}$  ( $2a$  = Abstand von Kerbgrund zu Kerbgrund,  $\rho$  =

Kerbradius) in Betracht. Die Versuche ergaben eine eindeutige Funktion  $\kappa = f(k)$ , wodurch der Zusammenhang der physikalischen Mehrachsichtigkeit  $\kappa$  mit der Kerbziffer  $k$  erwiesen ist. Diese Kurven gestatten auch eine Aussage für den Spitzkerb ( $k = \infty$  da  $\rho = 0$ ). Es ergibt sich interessanterweise, daß  $\kappa$  sich für  $k \rightarrow \infty$  einem Grenzwert nähert, der von dem  $\kappa$ -Wert für  $\rho \sim 0,5$  mm kaum noch zu unterscheiden ist und für die Stähle mit der Poissonschen

Querkontraktionsziffer  $\nu = \frac{1}{m} \sim 0,28$   $\kappa(\infty) = \frac{\nu}{1-\nu} \sim 0,39$

beträgt. Auch die Ergebnisse nach der DVM-Probe ließen sich gut in die Kurven einfügen.

Professor Kochendörfer zeigte dann einige räumliche Auftragungen der aus den Versuchen ermittelten Abhängigkeiten der Fließspannung  $\bar{\sigma}_F$  und der Reißspannung  $\bar{\sigma}_R$  von der Mehrachsichtigkeit  $\kappa$  und von der Temperatur. Dabei ist die Sprödbbruchtemperatur  $T_s$  durch die räumliche Kurve eindeutig gekennzeichnet, bei der die Kurve der Reißspannung  $\bar{\sigma}_R$  in die der Fließspannung  $\bar{\sigma}_F$  übergeht. Die Übergangstemperatur  $T_u$  stimmt mit der aus den Kerbschlagversuchen praktisch überein. Die gute Einordnung der DVM-Probe zeigte auch ein Diagramm, bei dem die Sprödbbruchtemperatur  $T_s$  aus den statischen Biegeversuchen und die Sprödbbruchtemperatur  $T_{ds}$  aus dynamischen Kerbschlagversuchen in Abhängigkeit von  $\kappa$  aufgetragen waren. Man erkennt auch eindeutig den Einfluß der Beanspruchungsgeschwindigkeit, die eine Erhöhung der Sprödbbruchtemperatur im vorliegenden Fall von  $60^\circ$  zur Folge hatte.

Das Sprödbbruch- und Zähigkeitsverhalten der untersuchten Stähle wurde durch die gezeigten Schaubilder eindeutig beschrieben. Allerdings sind die Ergebnisse nicht ohne weiteres auf alle Stähle übertragbar, da das Verhalten weitestgehend materialabhängig ist.

Abschließend betonte Professor Kochendörfer, daß neben den äußeren Kerben auch der Einfluß der inneren Kerben auf das Sprödbbruchverhalten nicht unterschätzt werden darf. Hierbei ist  $\kappa = 1$  anzusetzen.

Als Diskussionsbeitrag verwies Professor Klöppel darauf, daß mit der Kerbschlagprobe der dreiachsige Spannungszustand aus den Eigenspannungen zwar nur gering nachgeahmt wird, daß aber die dritte Komponente durch die Schlagwirkung ersetzt wird. Jüngste Untersuchungen über den Einfluß der Probenbreite beim Kerbschlagversuch im Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt zeigten, daß die Arbeitsaufnahme pro Flächeneinheit mit der Größe der Probenbreite je nach der strukturellen Beschaffenheit des Stahls steil oder allmählich abfällt. An Hand von Schaubildern erklärte er dann den maßgebenden Einfluß der Alterung, der sich durch Vergleich von verschiedenen Stählen, die teils in geschweißten Konstruktionen bereits versagt haben und teils höchst schweißbar sind, deutlich

ergibt. In diesem Zusammenhang wies Professor Klöppel auch auf die neue Norm DIN 17 100 hin, die erstmalig eine Klassifizierung in Gütegruppen nach der Arbeitsaufnahme der DVMR-Proben in gealtertem Zustand enthält.

In dem folgenden Vortrag sprachen Dipl.-Ing. J. Scheer und Dipl.-Ing. E. Winkelmann „Zur Benutzung elektronischer Rechenautomaten bei Problemen des Bauingenieurs“. Dipl.-Ing. Scheer ging bei seinen grundsätzlichen Ausführungen über das Programmieren von dem Ziffernrechner IBM 650 mit seinen vier Grundrechenarten aus, der von der Deutschen Forschungsgemeinschaft der Hochschule für Forschungszwecke zur Verfügung gestellt wurde und von Professor Dr. A. Walther, dem Leiter des Institutes für Praktische Mathematik, betreut wird. Am Beispiel der Berechnung der  $EI\epsilon\delta_{ik}$ -Werte für einen Durchlaufträger mit veränderlichem Trägheitsmoment nach der Simpsonschen Regel führte er in sehr anschaulicher Weise das Schema der Programmierung vor. In den Grundzügen handelt es sich um eine Art Tabellierung von funktionalen Zusammenhängen. Die vergleichende Betrachtung eines Rechenschemas, wie es der Statiker auch zur reinen zahlenmäßigen Auswertung benutzt, machte das sehr deutlich. Nach einigen Worten zum Bellsystem, mit dem man auf dem Ziffernrechner auf Kosten der Rechengeschwindigkeit einfacher programmieren kann, ging Dipl.-Ing. Scheer dann auf die Lochkarten ein, die die einzelnen Anweisungen für die Berechnung in Form von verschlüsselten Befehlen enthalten und auch gleichzeitig zur Eingabe der Daten dienen. Um zu demonstrieren, daß die Maschine bei der Speicherung der Ergebnisse oder auch Zwischenergebnisse keinerlei Unterscheidung zwischen Befehlen und Daten macht, wurde künstlich ein Fehler eingebaut und so die gefährliche Auswirkung einer falschen Lochung aufgezeigt.

Die systematische Auswertung der Biegedrillknickformel nach der DIN 4114 für verschiedene Profile durch Programmieren sowie die Berechnung von Zustandsflächen und Einflußlinien für Schnittgrößen und Verformungen eines bis über 11 Felder durchlaufenden Verbundträgers mit bereichsweise veränderlichem Trägheitsmoment und verschiedener Belastung (Gleichstreckenlast, Einzellast und Moment) bildeten den Abschluß des Vortrages. Für das letzte Beispiel wurde das Reduktionsverfahren von Dr. S. Falk<sup>2)</sup> für den Automaten modifiziert, da es sich dem für die Maschine gewünschten kontinuierlichen Rechenablauf am besten anpaßt. Der Vortragende machte dann noch Zahlenangaben über den Zeitaufwand und die Benutzungskosten. So braucht die Maschine zum Berechnen von 7 Werten der Biegedrillknickformel 10–14 Sekunden, zur Lösung eines Gleichungssystems  $14 \times 14$  mit einer rechten Seite 4 Minuten 10 Sekunden. Die Benutzungskosten der IBM 650 in Sindelfingen, die für Industrieraufgaben zur Verfügung steht, betragen DM 300,— je Stunde.

Dipl.-Ing. Winkelmann berichtete sodann über die Benutzung des elektronischen Rechenautomaten IBM 650 bei der Durchführung von Laboratoriumsversuchen, und zwar für die Berechnung der theoretischen Dehnungswerte bei Traglastversuchen an zweiaxig außermittig gedrückten Stäben, für die Ermittlung der Eigenspannungen geschweißter Träger durch Abarbeitung mit Hilfe der Biegepeilmessung und für die Berechnung der Kippstabilität von Rahmenecken, wobei beim letzteren Beispiel die gekoppelten Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen für die Maschine aufbereitet wurden. Beim ersten Beispiel bestand der besondere Vorteil darin, daß neben der kürzeren Rechenzeit auch gleichzeitig der Versuchsablauf beschleunigt wird, da die rechnerischen Vergleichswerte während eines Versuches zu bestimmen sind und daher bei Rechnung von Hand die Versuchsmaschine für diese Zeit (etwa 2 Tage) blockiert ist. Im Gegensatz dazu war beim zweitgenannten Beispiel die Benutzung der elektronischen Rechanlage wegen der Vielzahl der zum Versuchsergebnis zu verarbeitenden Messungen naheliegend.

In seinen einführenden Worten zur Vorführung eines Rechenautomaten im Institut für Praktische Mathematik begrüßte es Professor Walther sehr, daß Professor Klöppel auf dem Gebiet des Stahlbaus und der Statik dem elektronischen Rechnen die Tore weit geöffnet hat. Er halte es für unbedingt notwendig, daß der heutige Ingenieur die Hochschule nicht verlasse, ohne mit den Grundzügen des Programmierens vertraut zu sein. Daher wird bereits in Mathematik I, also im 1. Semester des technischen Studiums an der TH Darmstadt, Programmieren gelehrt. Er erwähnte die vielseitige Verwendung des Darmstädter Automaten für Forschungszwecke, auch der Industrie. Hierbei bewähre sich wiederum die Maschine als Helfer des Menschen.

Zum Abschluß des Kolloquiums fand die Besichtigung des Darmstädter Rechenautomaten IBM 650 statt.

G. Lacher

<sup>2)</sup> Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ing. Archiv XXIV (1956) S. 216/32.



## Persönliches

### berregierungsbaurat i. R. Bernhard Thier †

Kurz vor der Vollendung seines 71. Lebensjahres verstarb am 1. Oktober 1957 in Düsseldorf der frühere Vorstand des Autobahnbaubüros Köln, Herr Oberregierungsbaurat i. R. Bernhard Thier.

Am 20. November 1886 in Coesfeld/Westf. geboren, war er nach bestandenen Abitur im Jahre 1906 und Besuch der Technischen Hochschule in Aachen bei der Eisenbahndirektion Münster von 1911 bis 1914 als Regierungsbauführer. Nach Ablegung seiner zweiten Staatsprüfung 1914 ging er als Regierungsbaumeister zur Verwaltung der Reichseisenbahn in Elsaß-Lothringen, wo er bis April 1919 tätig war.

Von Straßburg ausgewiesen, kam er nach Köln, das ihm ab 1919 zur zweiten Heimat wurde. Hier war er ab 1. 4. 1921 als Regierungsbaurat und ab 1. 2. 1935 als Reichsbahnoberrat bei der Reichsbahndirektion Köln im Dienst. Nach einer zweijährigen Tätigkeit als Vorstand des Reichsbahn-Betriebsamtes Euskirchen wurde er 1934 zum Obersten Bauleitung Köln für den Bau der Reichsautobahnen ernannt und ab 1. 10. 1941 bis Kriegsende von der Direktion der Reichsautobahnen übernommen.

Im Verlauf seiner weiteren Tätigkeit war er bis zu seiner Pensionierung am 30. 11. 1951 als Oberregierungsbaurat Vorstand des Autobahnbaubüros Köln.

Ab 1. 1. 1952 wählte er seine Geburtsstadt Coesfeld/Westf. wieder als Wohnsitz.

Der Verstorbene war maßgeblich bei der Planung und dem Bau der Autobahnen Köln-Industriegebiet, Köln-Frankfurt, Köln-Münster und Köln-Aachen beteiligt. Nach dem Kriege war die Beseitigung der umfangreichen Kriegszerstörungen an Brücken, Fahrplätzen und den Autobahn-Betriebsanlagen seine Hauptaufgabe.

Überdies leitete er kurz nach dem Kriege den Aufbau seiner völlig zerstörten Vaterstadt Coesfeld in die Wege.

Mit dem verstorbenen Oberregierungsbaurat i. R. Bernhard Thier verlieren seine früheren Mitarbeiter einen Menschen von großer Herzengüte und ständigen Frohsinns. Er hat es jederzeit verstanden, seiner Umwelt dank seiner wunderbaren Begabung als bekannter westfälisch-plattdeutscher Heimatdichter und seines unverwundlichen Humors Freude und unvergeßliche Stunden zu schenken.

Josef Hermann

## Bücherschau

Fiesel, K.: Die Berechnung mehrfach abgespannter Mastgruppen. Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues, Heft 12, 43 S. und 23 Abbildungen. Köln 1956, Stahlbau-Verlag GmbH, DM 13,50.

Die Berechnung mehrfach abgespannter Maste nach der exakten Theorie (Spannungstheorie II. Ordnung) bietet mancherlei Schwierigkeiten. Unter anderem wirkt sich erschwerend aus, daß zwischen Stützdrücken und Stützenverschiebungen keine linearen Beziehungen bestehen, und damit die Superponierung von Lastfällen nicht möglich ist. In der Praxis werden daher schon für die Berechnung einzelner stehender Maste vielfach vereinfachende Annahmen gemacht. Die Berechnung durch Seile sich gegenseitig stützender Maste (Mastgruppen) ist ohne solche Vereinfachungen praktisch nicht mehr möglich. An die Stelle exakter Berechnung muß die näherungsweise Lösung treten, die die Tragsicherheit genügend gewährleistet.

In der vorliegenden Abhandlung hat der Verfasser die bei der Berechnung von Mastgruppen auftretenden schwierigen Probleme eingehend behandelt und einen Weg für die angenäherte Berechnung solcher Systeme aufgezeigt.

Die Arbeit gliedert sich in vier Abschnitte, von denen die beiden ersten die Seilstatik behandeln. Ausgehend vom einfachen Seil werden die Beziehungen zwischen den Seilkräften und den Verschiebungen der Abspannpunkte sowie den Stützdrücken für verschiedene Abspannsysteme abgeleitet. Abschnitt drei gibt Anleitungen für die praktische Durchführung der Mastgruppenberechnung; Abschnitt vier behandelt die Knicksicherheit der Maste und die Ermittlung eines Momentenmultiplikators  $\mu$ . Der Abhandlung sind vier Zahlen- und Kurventafeln für die praktische Zahlenrechnung beigegeben.

Der Verfasser macht in seinem Berechnungsvorschlag von einigen Näherungen Gebrauch, deren Zulässigkeit in den einzelnen Abschnitten begründet wird. So werden für die Ermittlung der Biegemomente I. Ordnung die Verschiebungsbeziehungen für die Abspannpunkte linearisiert. Dies ermöglicht die Momentenermittlung in geschlossener Form und die Superponierung von Lastfällen. Die Biegemomente II. Ordnung werden näherungsweise mittels des Momentenmultiplikators errechnet, der jeweils über die Masthöhe konstant angenommen wird und aus den hierzu festzustellenden Knicklasten der Maste gewonnen wird. Die Auswirkung dieser Näherung ist nicht immer leicht abschätzbar. Da auch die Knicklasten nicht ohne größeren Rechenaufwand ermittelt werden können, sei darauf

hingewiesen, daß in manchen Fällen eine iterative Ermittlung der Biegemomente II. Ordnung angezeigt sein könnte.

Das Studium der vorliegenden Abhandlung kann allen Statikern, die mit der Berechnung abgespannter Maste oder Mastgruppen zu tun haben, bestens empfohlen werden.

F. Utesch

Vorläufige Empfehlungen zur Wahl der Stahlgütegruppen für geschweißte Stahlbauten. Herausgegeben vom Deutschen Ausschuss für Stahlbau, DIN A 5, brosch. DM 3,00. Stahlbau-Verlag G.m.b.H., Köln, Oktober 1957.

Die Sicherheit geschweißter und dadurch eigenspannungsbehafteter Stahlkonstruktionen ist in bevorzugtem Maße eine Werkstofffrage, wie die von den ersten Schadensfällen im Stahlbau vor etwa 20 Jahren ausgehenden Untersuchungen in steigendem Maße gezeigt haben. Eine wesentliche Aufgabe des Konstrukteurs ist es daher, die Stahlgüte zu bestimmen. In dieser schwierigen Frage wurde der Konstrukteur bisher durch technische Lieferbedingungen und Vorschriften nur spärlich beraten. Diese Lücke wird weitgehend geschlossen durch das Erscheinen der DIN 17 100 (Allgemeine Bau- und Stahlteile), welche die Stähle nach ihrer Schweißbeignung in 3 Gütegruppen einteilt, und jetzt durch die „Vorläufigen Empfehlungen zur Wahl der Stahlgütegruppen für geschweißte Stahlbauten“<sup>1)</sup>.

Diese „Empfehlungen“ sollen dem Konstrukteur helfen bei der Auswahl der Stahlgütegruppe nach DIN 17 100 für Stahlbauten und Stahlbauteile im Geltungsbereich von:

DIN 4100 Geschweißte Stahlschweißbauten (1956),

DIN 4101 Geschweißte, vollwandige Straßenbrücken (1937),

DIN 120 Krane und Kranbahnen (1936),

DV 848 Geschweißte Eisenbahnbrücken (1955).

Dies geschieht durch eine eindeutige Zuordnung der Schweißgefährdung der Stahlkonstruktion zur Schweißbeignung des Werkstoffes.

Die „Empfehlungen“ bauen auf Untersuchungen und einem 1954 vorgetragenen Vorschlag von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Klöppel auf, an den sie sich eng anlehnen<sup>2)</sup>.

Als bestimmend für die Schweißgefährdung der Konstruktionen werden 7 „Einflüsse“ (mit A bis G bezeichnet) herausgestellt, die bei dem jeweiligen zu beurteilenden Bauteil einzeln zahlenmäßig mit 1—5 oder 1—3 zu bewerten sind. Die „Bewertungszahlen“ für die 7 Einflüsse, die verschiedene physikalische Dimensionen haben, werden addiert zu der demgemäß komplexen Summe Z der Bewertungszahlen, die ein zahlenmäßiges Kriterium für die Schweißgefährdung und damit für die an den Werkstoff zu stellenden Anforderungen ist. Für die Werkstoffwahl werden den Stahlgütegruppen der DIN 17 100 Intervalle der Bewertungssummen zugeordnet.

Als Novum bei einer Sicherheitsuntersuchung, um die es im Grunde bei der Wahl der Stahlgüte für eine geschweißte Konstruktion geht, ist zu erwähnen, daß als Einfluß G die „Schadensstufe“ („Gefahrenklasse“) eingeführt wird. Bei der Werkstoffwahl soll danach der Konstrukteur auch überlegen, welchen Schaden das Versagen des einzelnen Konstruktionsteiles im Zusammenhang des gesamten Tragsystems verursachen kann. Die „Empfehlungen“ gestatten es dadurch in manchen Fällen dem Konstrukteur, bei weniger wichtigen oder „untergeordneten“ Bauteilen eine niedrige Stahlgütegruppe zu wählen. Solche Überlegungen haben eine große wirtschaftliche Bedeutung und kommen vor allem der Anwendung der Windfrischstähle, auf die wir in Deutschland überwiegend angewiesen sind, zugute.

Das Bemühen um Wirklichkeitsnähe zeigt sich bei den „Empfehlungen“ in der Aufnahme des Einflusses C = Herstellungsempfindlichkeit der Längsnaht; es wird dadurch z. B. berücksichtigt, daß eine doppelseitige Kehlnaht hinsichtlich des Auftretens von Schweißfehlern und eines Durchschlagens von Rissen weniger empfindlich ist als eine Stumpf- oder eine K-Stegnaht.

Die „Empfehlungen“ gehören auf den Tisch jedes Stahlbaukonstrukteurs, der bei Entwurf oder Ausführung Einfluß auf die Werkstoffwahl hat. Da die Bewertungszahlen der 7 aufgeführten Einflüsse z. T. auch durch die Art der Konstruktion, durch Nahtanordnung und -form beeinflusst werden, kann der Konstrukteur seiner Aufgabe, mit der erforderlichen Sicherheit und möglichst wirtschaftlich zu bauen, nur gerecht werden, wenn er sich schon beim Entwurf bewußt ist, daß er die Bewertungszahlen und damit letztlich den Materialpreis mit einem gewissen Spielraum selbst in der Hand hat; seine Aufgabe sollte sich nicht darin erschöpfen, für eine frei gestellte und festgelegte Konstruktion nachträglich an Hand der „Empfehlungen“ die hierfür erforderliche Stahlgüte zu bestimmen.

Wie in den „Empfehlungen“ selbst betont wird, soll und kann kein todsicheres Rezept für die richtige Werkstoffwahl geboten

<sup>1)</sup> Im folgenden kurz mit „Empfehlungen“ bezeichnet.

<sup>2)</sup> Klöppel, K.: Sicherheit und Güteanforderungen bei den verschiedenen Arten geschweißter Konstruktionen, Schweißen und Schneiden 6 (1954), Sonderheft S. 38/64, Auszug hieraus in „Stahlbau“ 24 (1955), H. 5, S. 114/116.

Klöppel, K.: Sicherheit und Güteanforderungen bei geschweißten Konstruktionen. Stahlbau, ein Handbuch für Studium und Praxis, Band 2, Köln 1957, S. 127.



werden. Zur richtigen Auswertung der „Empfehlungen“ muß sich der Konstrukteur zum mindesten mit den Grundlagen, die ihm in Veröffentlichungen<sup>2)</sup> geboten werden, gründlich vertraut machen.

Mit der Formulierung „Vorläufige Empfehlungen...“ gibt der Herausgeber deutlich zu erkennen, daß in einiger Zeit Ergänzungen oder Korrekturen erforderlich werden können.

Es ist zu erwarten, daß die „Empfehlungen“ über den Stahlbau im engeren Sinne hinaus auch in anderen Industriezweigen, in denen hochwertige Stahlkonstruktionen geschweißt werden, Interesse oder z. T. sogar Anwendung finden werden. Dipl.-Ing. H. Mathar

Kantorowitsch, S. B.: Die Festigkeit der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie. Übersetzung aus dem Russischen. 609 S., 204 Bilder, 63 Tafeln. Berlin 1955, VEB Verlag Technik. DM 25,—.

Wenn sich der im Behälter- und Apparatebau tätige Ingenieur bisher nach Literatur umseh, von der er sich die Lösung der mannigfaltigen Fragen verspricht, die dieses Sondergebiet aufwirft, so war er immer wieder auf Bücher angewiesen, die zwar in hervorragender und umfassender Weise die theoretischen Grundlagen der statischen, Stabilitätstheoretischen und dynamischen Untersuchungen an Schalen darstellen, aber die wichtigen Fragen der Gestaltung und der Werkstoffwahl unbeantwortet lassen. Diese Lücke füllt nun das vorliegende Buch des russischen Wissenschaftlers S. B. Kantorowitsch, das 1952 zuerst in Moskau erschien, 1955 in einer deutschen Übersetzung im VEB-Verlag Technik Berlin herausgebracht wurde und jetzt auch im Westen erhältlich ist.

Es bringt im ersten Teil die Membran-, Biege- und Stabilitätstheorie der dünnen Schalen und einen Abschnitt über Entwurfsfragen. Der zweite Teil behandelt die Behälter mit sehr hohen Drücken, die als dickwandige oder Mehrlagenbehälter ausgeführt und berechnet werden müssen und bringt zahlreiche Werkstoffhinweise, Ausführungsarten und Vergleiche. Im dritten Teil über dünne Platten ist unter anderem ein ausführlicher Katalog von Lösungen der Kreis- und Kreisringplatte mit verschiedenen Belastungs- und Lagerungsarten enthalten. Die Kreisplatte mit veränderlicher Dicke wird behandelt und für die Rechteckplatte sind Tabellen angegeben, die die Berechnung wesentlich erleichtern. Der vierte Teil bringt schnell rotierende Scheiben mit verschiedenem Profil und ebenfalls zahlreiche Tabellen, rotierende mit Flüssigkeit gefüllte Behälter, sowie konische Schalen und Schaufeln unter Fliehkraftbelastung. Eine ausführliche Behandlung aller Arten von Schwingungen, wie sie im Apparatebau vorkommen, enthält der letzte Teil. Auch hier sind viele praktische Beispiele eingestreut.

Nachteilig wird in einzelnen Kapiteln, wo umständliche Methoden abgeleitet werden, die in der westlichen Literatur längst durch einfachere ersetzt sind, die Isoliertheit der sowjetischen Wissenschaft von der westlichen Welt spürbar. Auch das Literaturverzeichnis zählt fast ausschließlich russische Veröffentlichungen auf. Dessenungeachtet kann aber dieses Buch, das aus einem reichen Erfahrungsschatz sowohl in der Praxis als in der Lehre entstand, jedem Ingenieur des Behälter- und Apparatebaus empfohlen werden.

R. Schar dt

Dyrbye, C.: Circular cast-iron plates. Acta Polytechnica 208 (1956) Kopenhagen 1956. 12 Seiten. Etwa 3,35 DM.

Die  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ -Linie des Gußeisens ist vom Ursprung bis zum Bruch eine stetig gekrümmte Kurve ohne ausgeprägten Fließbereich. Diese Tatsache ist für die rechnerische Bestimmung der Traglasten von innerlich oder äußerlich statisch unbestimmten Tragwerken aus Gußeisen außerordentlich erschwerend. Der Verfasser hat an einer kreisrunden Platte aus Gußeisen vom Radius  $a = 21$  cm und der Dicke  $d = 2$  cm, die an drei Punkten des Randes im Abstand von  $2/3 \cdot \pi$  gelagert und in Plattenmitte durch eine kreisförmige konzentrierte Flächenlast mit dem Radius  $b = 2$  cm und der Größe  $P$  belastet ist, die Rechnungen für die Bruchlast durchgeführt einmal mit der Annahme ideal elastischen und vergleichsweise mit der Annahme ideal elastisch-ideal plastischen Werkstoffes. Die beiden Rechnungsergebnisse  $P_e$  und  $P_p$  vergleicht er mit dem Versuchsergebnis  $P$ . Dabei ergibt sich als Mittelwert aus 18 Versuchen  $\frac{P}{P_e} = 1,22$  und  $\frac{P}{P_p} = 0,69$ .

Mit diesen Verhältniswerten soll dem Statiker ein Anhaltspunkt für die Beurteilung der Bruchlasten von Gußbauteilen gegeben werden. Sie hängen natürlich stark von der Art des Tragwerks und des Belastungsfalls ab und müssen im Einzelfall geschätzt werden. Für den Fall, daß sowohl  $P_e$  als auch  $P_p$  leicht zu ermitteln sind, wird noch die Überschlagsformel  $P \approx 0,7 P_e + 0,3 P_p$  angegeben. Diese Formel erfüllt auch den Grenzfall, statisch bestimmte Systeme, bei denen bekanntlich  $P_e = P_p = P$  sein muß. Die Formel soll nicht als endgültig betrachtet werden. Sie hat vielmehr ihre Richtigkeit noch durch die Erprobung an anders gearteten Gußeisenträgwerken zu beweisen.

R. Schar dt

Roloff, P.: Das Stahlrohrgerüst. 184 Seiten. Berlin 1956, Ullstein Fachverlag. Ganzleinen DM 22,—.

Als Neuerscheinung befaßt sich dieses Buch mit einem Gebiet des Bauingenieurwesens, das bisher in der Literatur kaum Beachtung gefunden hat. Die Verwendung von Stahlrohren zum Gerüstbau hat in den letzten Jahren stark zugenommen, insbesondere auf Grund der Wirtschaftlichkeit dieser materialsparenden Leichtbaukonstruktion. Daß höhere Anforderungen an die Berechnung gestellt werden liegt auf der Hand. Für den in statischen Fragen weniger gewandten Ingenieur enthält dieses Buch zahlreiche Bemessungstabellen, auf denen für das sogenannte Stahlrohr-Regelgerüst — das Ständerfachwerk — bei vorgegebener Belastung die für den Aufbau dieses Gerüsts frei wählbaren Größen, beispielsweise Knicklängen, Abstand der Ständer usw., entnommen werden können. Angaben über Materialverbrauch, über Verbindungsmittel und konstruktive Einzelheiten nehmen einen breiten Raum ein. Im zweiten Teil des Buches werden Sonderbauarten des Stahlrohrgerüsts behandelt, unter anderem fahrbare Gerüste, turmartige Gerüste, Raumgerüste, Lehrgerüste sowie einige Neuentwicklungen im Stahlrohrgerüstbau. Einfache Berechnungsbeispiele geben eine Anleitung für die Aufstellung der für diese Gerüste notwendigen statischen Berechnung. Es wäre zu begrüßen gewesen, wenn gerade für die Sonderbauarten der Erörterung schwierigerer statischer Fragen, die für die Sicherheit solcher Konstruktionen keineswegs von untergeordneter Bedeutung sind, eine gewisse Beachtung geschenkt worden wäre. Erwähnenswert ist schließlich noch die schöne Ausstattung und die Verwendung von Kunstdruckpapier, die den Preis des Buches etwa rechtfertigt.

W. G o d e r

Zuschrift zu Kl ö p p e l, K. und S c h e e r, J.:

Beulwerte der durch zwei gleiche Längssteifen in den Drittelpunkten der Feldbreite ausgesteiften Rechteckplatte bei Navierschen Randbedingungen. Stahlbau 26 (1957) H. 9 S. 246/52.

Auf Seite 252 ist als Ersatz für eine sichere und genügend genaue Grenzkurve die Dunkerlysche Gerade angegeben. Der ideale Beulsicherheitswert  $\nu_{Bi}$  ist in den angeführten Beispielen graphisch unter Verwendung dieser Geraden gefunden.

Für unausgesteifte Rechteckplatten kann nach DIN 4114, Bl. I Abschnitt 17.3 die ideale Vergleichsspannung  $\sigma_{VKi}$  unmittelbar aus der dort angegebenen Formel erhalten werden, die auf meinen Aufsatz „Beitrag zur Frage der Beulsicherheit allseitig gelenkig gelagerter Rechteckplatten“, die Bautechnik 1943, Heft 43/47, Seite 286, zurückgeht.

Es liegt nun nahe, eine derartige Formel bei Zugrundelegung der Dunkerlyschen Geraden für die ausgesteiften Platten aufzustellen, was sich auch wie folgt ohne Schwierigkeiten erreichen läßt.

Die Gleichung der Geraden lautet

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_{1Ki}} + \frac{\tau^*}{\tau_{Ki}} = 1, \quad \dots \dots \dots (1)$$

wobei  $\sigma_1^* = \nu_{Bi} \cdot \sigma_1$  und  $\tau^* = \nu_{Bi} \cdot \tau$  ist.

Damit wird (1) zu

$$\nu_{Bi} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{1Ki}} + \frac{\tau}{\tau_{Ki}} \right) = 1 \text{ und } \nu_{Bi} = \frac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_{1Ki}} + \frac{\tau}{\tau_{Ki}}} \quad \dots \dots (2)$$

Die ideale Vergleichsspannung wird

$$\sigma_{VKi} = \nu_{Bi} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau^2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_{1Ki}} + \frac{\tau}{\tau_{Ki}}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Dr.-Ing. E. M ü l l e r

## Erwiderung

Wir danken Herrn Dr.-Ing. E. Müller für seine Zuschrift. Natürlich ist die Beulsicherheit analytisch genauso zu ermitteln wie graphisch.

Es ist zu begrüßen, daß Herr Dr. Müller hierauf unter Hinweis auf seine uns bekannte Arbeit in der Bautechnik 1943 aufmerksam macht, da der analytische Weg mit der DIN 4114 übereinstimmt.

Uns lag bei der Veröffentlichung mehr daran, die Zusammenhänge zu zeigen, die für die Ermittlung der Beulsicherheit bei gleichzeitiger Beanspruchung durch  $\sigma$ - und  $\tau$ -Spannungen wichtig sind. Außerdem ist der graphische Weg im Hinblick auf günstigere Grenzkurven

$\frac{\sigma_{1ki}^*}{\sigma_{1ki}} = f \frac{\tau_{ki}^*}{\tau_{ki}}$ , die lediglich empirisch zu finden und analytisch nur näherungsweise anzugeben sein werden, vorzuziehen oder sogar unumgänglich.

K. Kl ö p p e l und J. S c h e e r



# DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kurt Klöppel,  
Darmstadt, Technische Hochschule

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Wilmersdorf  
Hohenzollerndamm 169, Ruf: 87 15 56

7. Jahrgang      Berlin, Februar 1958      Heft 2

## Inhalt

Seite

adojkovic, Milan, Prof. Ing., Belgrad: Die neue Straßenbrücke über die Save in Belgrad . . . . .	29
löppel, K. und Schardt, R., Darmstadt: Beitrag zur praktischen Ermittlung der Vergleichsschlankheit $\lambda_{vi}$ von mittig gedrückten Stäben mit einfachsymmetrischem offenem dünnwandigem Querschnitt . . . . .	35
oeland, Günter, Dr.-Ing., Hannover: Seitenträgerbrücken, eine Abwandlung der Mittelträgerbrücken . . . . .	42
bel, Heinz, cand. ing., Darmstadt: Das Beulen eines Kreiszyinders unter axialem Druck nach der nicht-linearen Stabilitätstheorie . . . . .	45

## verschiedenes:

acher, G., Dipl.-Ing.: Kolloquium am Lehrstuhl für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt . . . . .	53
---	----

## ersönliches

berregierungsaurat i. R. Bernhard Thier † . . . . .	55
ücherschau . . . . .	55

uschrift und Erwiderung zu Klöppel, K., und Scheer, J.: Beulwerte der durch zwei gleiche Längssteifen in den Drittelpunkten der Feldbreite ausgesteiften Rechteckplatte bei Navierschen Randbedingungen. Stahlbau 26 (1957) H. 9 S. 246/52 . . . . .	56
--	----

## Bezugsbedingungen

vierteljährlich 7,50 DM (Ausland nur ganzjährlich 30,— DM), Einzelheft 2,50 DM und Zustellgeld. Monatlich ein Heft, Bezugspreis im voraus zahlbar. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung und jede Postanstalt oder der Verlag entgegen. Postscheckkonto: Berlin-West 16 88. Abbestellungen müssen einen Monat vor Schluß des Kalendervierteljahres. Bestellungen für das Ausland sind zu richten

für Österreich an Rudolf Lehner & Sohn, Wien I/1, Seilerstätte 5,  
für die Schweiz an Verlag für Wissenschaft, Technik und Industrie AG.,  
Basel, Schützenmattstraße 43,  
für Italien an Libreria Commissionaria Sansoni, Firenze, Via Gino  
Capponi 26,  
für das gesamte übrige Ausland und Übersee an I. R. Maxwell & Co. Ltd.,  
London W 1, 4/5 Fitzroy Square.



# **WÄLZLAGER IN EISENBAHNWAGEN UND DAMPFLOKOMOTIVEN**

50 Jahre Entwicklung  
bei der Deutschen Bundesbahn  
und ihren Vorgängern

Von Techn. Bundesbahn-Oberinspektor a. D.  
**ALFRED ILLMANN**

und Techn. Bundesbahnamtman  
**HANS KURT OBST**

VIII, 184 S., mit 177 Bildern und 11 Zahlentafeln.  
DIN A 5. Brosch. DM 15,—. Leinen DM 18,—

**VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN**  
Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

## **HÜTTE**

Des Ingenieurs Taschenbuch

### **HÜTTE II A**

#### **MASCHINENBAU (Teil A)**

Maschinenelemente · Getriebe (Dreh-  
moment-Umformer · Maschinendynamik  
Rohrleitungen und Absperrorgane  
Energiewirtschaft · Kolbenmaschinen  
Strömungsmaschinen · Werkzeugmaschinen  
Regelungstechnik

XXVIII, 1292 Seiten, 2024 Bilder, 406 Tafeln  
Ganzleinen DM **25,—** Leder DM **34,—**

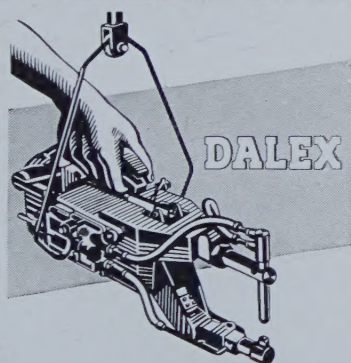
**VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung



# FLIESS

## U-P. Schweißdraht



**DALEX-WERK**  
Niepenberg & Co GmbH, Wissen/Sieg  
Telefon 262/284 - FS. 0312717



# BÖHLER

## EDELSTÄHLE UND ERZEUGNISSE AUS EDELSTAHL

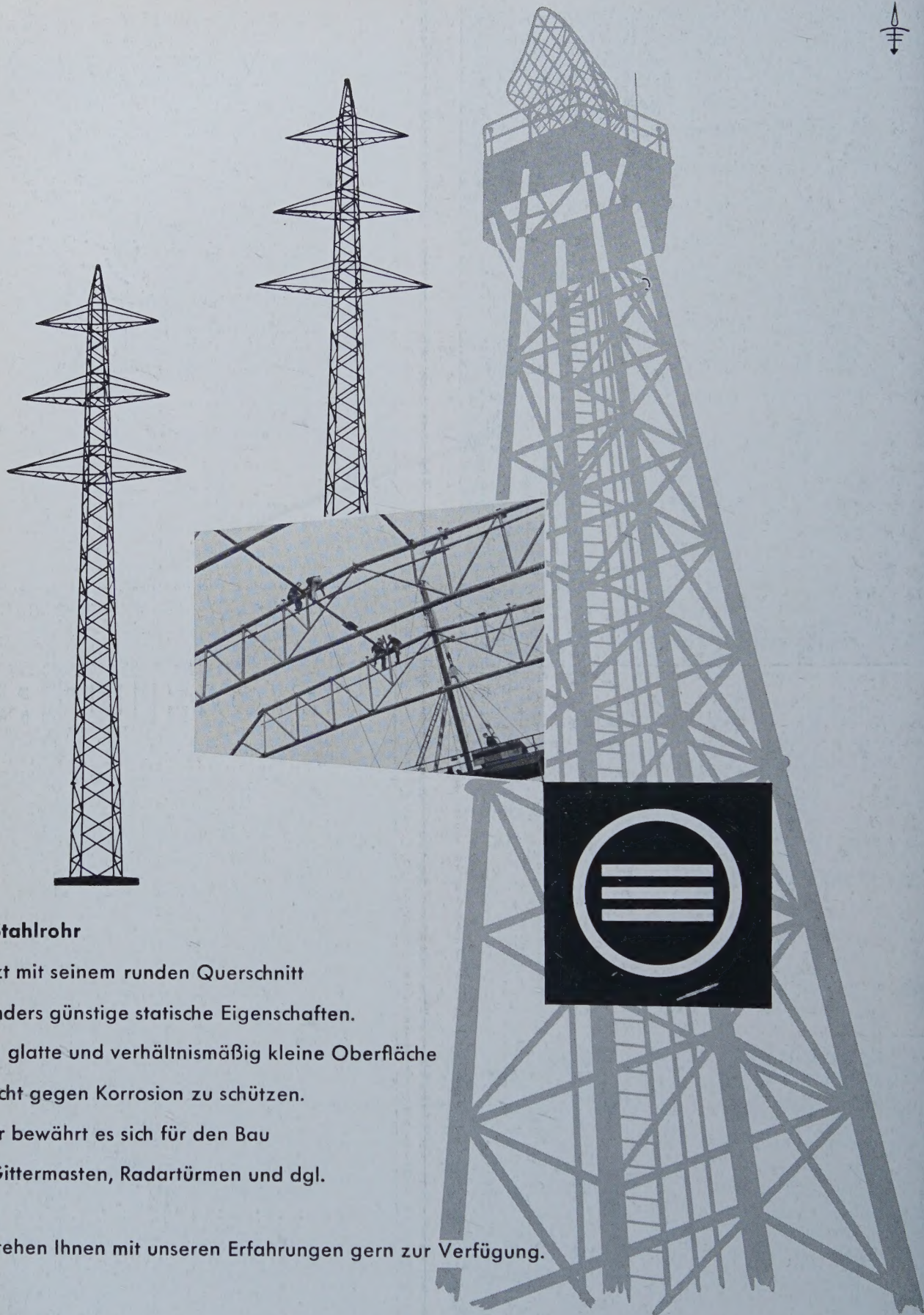
Stabstahl · Bleche  
Schmiedestücke  
Elektroden und Schweißdrähte  
für sämtliche  
Verwendungszwecke  
Hartmetall »Böhlerit«  
Feinguß »Exactus«  
Autofedern  
Stahlformguss  
Ventilkegel  
Preßluftwerkzeuge

**GEBR. BÖHLER & CO.**  
AKTIENGESELLSCHAFT  
EDELSTAHLWERKE



Verkaufsniederlassungen und Vertretungen in allen bedeutenden  
Städten Deutschlands und in allen Ländern der Welt





### Das Stahlrohr

besitzt mit seinem runden Querschnitt  
besonders günstige statische Eigenschaften.  
Seine glatte und verhältnismäßig kleine Oberfläche  
ist leicht gegen Korrosion zu schützen.  
Daher bewährt es sich für den Bau  
von Gittermasten, Radartürmen und dgl.

Wir stehen Ihnen mit unseren Erfahrungen gern zur Verfügung.

**PHOENIX-RHEINROHR AG**

VEREINIGTE HUTTEN- UND RÖHRENWERKE DUSSELDORF